МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

УДК 517.956.35
DOI: 10.31040/2222-8349-2026-0-2-28-32

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© О.Л. Бозиев

Параболическое уравнение Кирхгофа, содержащее интегральную нагрузку в главной части, моделирует некоторые нелинейные диффузионные процессы. В рассматриваемом случае нагрузкой является рациональная степень *m*/*n* линейной функции от нормы производной искомого решения в пространстве $H^1(\Omega)$. В работе устанавливаются априорные оценки интегральной нагрузки, для чего производятся интегральные преобразования слагаемых скалярного произведения исходного уравнения и временной производной его решения. Таким способом получены априорные неравенства, которые ограничивают интегральную нагрузку уравнения Кирхгофа известной функцией, зависящей от правой части уравнения и начального условия, а также от знака и вида показателя степени. Показан способ редукции уравнения Кирхгофа к линейному уравнению путем замены интегральной нагрузки правыми частями этих оценок. Приведен пример такой редукции. Установленные оценки интегральной нагрузки и некоторые другие, сопутствующие им, могут быть использованы для доказательства существования и единственности решения соответствующих задач. Описанный способ установления априорных оценок и последующей редукции нелинейного уравнения к линейному может быть применен к широкому классу нагруженных уравнений, содержащих модуль интеграла рациональной степени искомой функции или ее производной.

Ключевые слова: параболическое уравнение Кирхгофа, априорная оценка, интегральная нагрузка, редукция к линейному уравнению.

Введение. В области $Q = \{(x,t): x \in \Omega \subseteq R^n,\ t \in [0,T]\}$ с границей $\partial\Omega \in C^2$ рассмотрим уравнение Кирхгофа

$$u_t - a(s)\Delta u = f(x,t), \qquad (1)$$

при условиях

$$u(x,0) = \varphi(x), \nabla u\big|_{\partial\Omega} = 0, x = (x_1,...,x_n) \in \Omega. \qquad (2)$$

Будем искать непрерывно-дифференцируемую по $t \in [0,T]$ и дважды непрерывно-дифференцируемую по $x \in \Omega$ функцию *u*(*x*, *t*), удовлетворяющую условиям (1), (2). Положим при этом

$$a(s) = \left(C_1 s + C_2\right)^{\pm p}, C_1 > 0, C_2 \ge 0, p = \frac{m}{n}, m,n \in N,$$

$$s = s(t) = \|\nabla u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \Omega \subset R^n.$$

Функцию *a*(*s*), как и *s*(*t*), назовем интегральной нагрузкой уравнения (1).

Уравнения вида (1) и подобные им, содержащие дополнительные члены, моделируют процессы диффузии в различных средах. Впервые подобное одномерное уравнение, по-видимому, было рассмотрено в работе [1], посвященной гиперболическим уравнениям с интегральной нагрузкой, для которых «указывается прием решения некоторых краевых задач при помощи бесконечных систем дифференциальных уравнений». Здесь же указанный прием переносится на параболические уравнения вида (1). Впоследствии подобные уравнения активно исследовались. Можно упомянуть работы [2–4], в которых рассматривается задача о проникновении электромагнитного поля в вещество, коэффициент электропроводности которого зависит от температуры. Многомерное уравнение вида (1) исследовалось в [5] и некоторых других работах. Из более поздних можно указать, например, работы [6–9], где изучаются вопросы разрешимости начально-краевых задач для уравнений с интегральными нагрузками разного вида в главной части, в том числе и с младшими членами. К подобным уравнениям можно редуцировать практически важные параболические уравнения со степенной нелинейностью в главной части, описывающих процессы фильтрации и диффузии газов [10, 11]. В этом случае редукция производится путем замены нелинейного члена его интегралом по пространственной переменной.

БОЗИЕВ Олег Людинович – к.ф.-м.н., Институт информатики и проблем регионального управления КБНЦ РАН, Кабардино-Балкарский государственный университет, e-mail: boziev@yandex.ru

В настоящей работе для интегральной нагрузки уравнения (1) устанавливаются априорные оценки, правые части которых являются известными функциями свободного члена уравнения и начального условия. Они могут быть использованы для редукции нагруженного уравнения к ассоциированному с ним линейному уравнению путем замены ими интегральной нагрузки. Полученное таким образом аппроксимирующее линейное уравнение может быть принято за начальное приближение к исходному нагруженному уравнению в итерационном процессе поиска решения задачи (1), (2). Примененный в работе подход ранее использовался автором в [12] для гиперболического уравнения Кирхгофа.

1. Интегральная нагрузка $a(s)=\left(C_1s+C_2\right)^{+p}$

Рассмотрим уравнение (1) в виде

$$u_t-\left(C_1s+C_2\right)^{\frac{m}{n}}\Delta u=f(x,t),m,n\in N. \qquad (3)$$

Теорема 1. Пусть решением задачи (3), (2) является функция $u\in H^1(\Omega)$, и при этом $u_t,\nabla\varphi,f\in L_2(\Omega)$. Тогда функция $(C_1s+C_2)^{\frac{m+n}{n}}$ ограничена зависящей от t константой.

Доказательство. Легко убедится, что в скалярном произведении

$$(u_t,u_t)-a(s)(\Delta u,u_t)=(f,u_t) \qquad (4)$$

имеет место равенство

$$-a(s)(\Delta u,u_t)=\frac{1}{2C_1}\left(C_1s+C_2\right)^{\frac{m}{n}}\frac{d}{dt}\left(C_1s+C_2\right),$$

приводящее (4) к виду

$$2\|u_t\|^2+\frac{1}{C_1}\left(C_1s+C_2\right)^{\frac{m}{n}}\frac{d}{dt}\left(C_1s+C_2\right)=2\int_\Omega fu_tdx.$$

Интегрируя последнее, получим равенство

$$2\int_0^t\|u_t\|^2d\tau+\frac{1}{C_1}\frac{n}{m+n}\left(C_1s+C_2\right)^{\frac{m+n}{n}}=$$

$$=2\int_0^t\int_\Omega fu_tdxd\tau+\frac{1}{C_1}\frac{n}{m+n}\left(C_1s(0)+C_2\right)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Применяя неравенство Коши с ε = 0.5 к первому слагаемому правой части, получим

$$\frac{1}{C_1}\frac{n}{m+n}\left(C_1s+C_2\right)^{\frac{m+n}{n}}\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int_0^t\|f\|^2d\tau+\frac{1}{C_1}\frac{n}{m+n}\left(C_1s(0)+C_2\right)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Отсюда следует выполняющаяся для всех $t\in[0,T]$ оценка

$$(C_1s+C_2)^{\frac{m+n}{n}}\le K(t), \qquad (5)$$

$$K(t)=C_1\frac{m+n}{2n}\int_0^t\|f\|^2d\tau+\left(C_1\|\nabla\varphi\|^2+C_2\right)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Теорема 1 доказана.

Неравенство (5) позволяет редуцировать нелинейное уравнение (3) к линейному уравнению. Для этого положим в (3)

$$(C_1s+C_2)^{\frac{m}{n}}=\left(K(t)\right)^{\frac{m}{m+n}},$$

что влечет за собой уравнение

$$u_t-\left(K(t)\right)^{\frac{m}{m+n}}\Delta u=f(x,t). \qquad (6)$$

Замечание 1.1. Из (5) в силу положительности p вытекает оценка

$$C_1s+C_2\le K^{\frac{n}{m+n}},$$

откуда следует

$$s=\|\nabla u\|^2\le C_1^{-1}\left(K^{\frac{n}{m+n}}-C_2\right).$$

Замечание 1.2. Интегрируя скалярное произведение (1) и функции u и переходя к неравенству, получим

$$\|u\|^2\le\int_0^t\|u\|^2d\tau+\int_0^t\|f\|^2d\tau.$$

Применение неравенства Гронуолла–Беллмана [13] дает оценку

$$\|u\|^2\le K_3(t),$$

$$K_3(t)=(e^t-1)\int_0^t\int_0^\tau\|f\|^2d\theta d\tau+\int_0^t\|f\|^2d\tau.$$

2. Интегральная нагрузка $a(s)=\left(C_1s+C_2\right)^{-p}$

При условиях (2) рассмотрим уравнение

$$u_t-\left(C_1s+C_2\right)^{-\frac{m}{n}}\Delta u=f(x,t),m,n\in N. \qquad (7)$$

При данном виде $a(s)$ в скалярном произведении (4) имеет место равенство

$$-a(s)(\Delta u,u_t)=\frac{1}{2C_1}\left(C_1s+C_2\right)^{-\frac{m}{n}}\frac{d}{dt}\left(C_1s+C_2\right).$$

Продолжим его при $m=n$ и $m\neq n$.

При $m=n$ (т.е. $p=-1$) имеем

$$\left(C_1s+C_2\right)^{-1}\frac{d}{dt}\left(C_1s+C_2\right)=\frac{d}{dt}\ln\left(C_1s+C_2\right). \qquad (8)$$

Пусть $m \neq n$. Тогда

$$\left(C_1 s + C_2\right)^{-\frac{m}{n}} \frac{d}{dt}\left(C_1 s + C_2\right) = \frac{n}{n-m} \frac{d}{dt}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{n-m}{n}}. \quad (9)$$

Заметим также, что

$$s(0) = \int_{\Omega} \left|\nabla u(x,0)\right|^2 dx = \int_{\Omega} \left|\nabla \varphi(x)\right|^2 dx = \left\|\nabla \varphi\right\|^2.$$

Теорема 2. Пусть решением задачи (7), (2) является функция $u \in H^1(\Omega)$, и при этом $u_t, \nabla\varphi, f \in L_2(\Omega)$, $m, n \in N$. Тогда нижеследующие функции ограничены зависящими от t константами:

a) $\ln\left(C_1 s + C_2\right)$ при $m = n$, $C_1 s + C_2 \geq 1$;

b) $\ln\left(C_1 s + C_2\right)^{-1}$ при $m = n$, $C_1 s + C_2 < 1$;

c) $\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{n-m}{n}}$ при $m < n$, $s(0) > 0$;

d) $\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}$ при $m > n$, $s(0) > 0, s'(t) > 0$,

$$\int_0^t \|f\|^2 d\tau < \frac{2n}{m-n} \frac{1}{C_1} \left(C_1 \|\nabla\varphi\|^2 + C_2\right)^{\frac{n}{m-n}}. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $m = n$. С учетом (8) запишем

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{d}{dt} \ln\left(C_1 s + C_2\right) = 2\int_{\Omega} f u_t dx.$$

После интегрирования последнего перейдем к неравенству

$$\ln\left(C_1 s + C_2\right) \leq \frac{C_1}{2} \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \ln\left(C_1 s(0) + C_2\right), \quad (11)$$

a) Пусть $C_1 s + C_2 \geq 1$. Тогда

$$\ln\left(C_1 s + C_2\right) \leq K_1(t), \quad (12)$$

$$K_1(t) = \frac{C_1}{2} \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \ln\left(C_1 \|\nabla\varphi\|^2 + C_2\right).$$

Замечание 2.1. Из (12) следует

$$C_1 s + C_2 \leq e^{K_1},$$

что позволяет записать

$$s = \|\nabla u\|^2 \leq C_1^{-1}\left(e^{K_1} - C_2\right).$$

b) Пусть $C_1 s + C_2 < 1$. Запишем (11) в виде

$$\ln\left(C_1 s + C_2\right)^{-1} \leq \frac{C_1}{2} \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \ln\left(C_1 s(0) + C_2\right),$$

откуда следует

$$\ln\left(C_1 s + C_2\right)^{-1} \leq K_2(t), \quad (13)$$

$$K_2(t) = \frac{C_1}{2} \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \ln\left(C_1 \|\nabla\varphi\|^2 + C_2\right)^{-1}.$$

c) С учетом (9) запишем уравнение (7) в виде

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{n-m} \frac{d}{dt}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{n-m}{n}} = 2\int_{\Omega} f u_t dx.$$

Его интегрирование приводит к оценке

$$\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{n-m}{n}} \leq K(t), \quad (14)$$

$$K(t) = C_1 \frac{n-m}{2n} \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \left(C_1 \|\nabla\varphi\|^2 + C_2\right)^{\frac{n-m}{n}}.$$

d) Интегрируя (9) при $m > n$, заметим, что в силу возрастания функции $s(t)$

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{n-m}{n}} d\tau =$$

$$= \frac{\left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}} - \left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}}{\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}} \left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}} < 0.$$

Переходя к неравенству, запишем

$$\frac{\left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}} - \left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}}{\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}} \left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}} \leq$$

$$\leq C_1 \frac{m-n}{2n} \int_0^t \|f\|^2 d\tau.$$

С помощью элементарных преобразований перейдем к неравенству

$$\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}} - \left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}} \leq$$

$$\leq F(t)\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}},$$

$$F(t) = C_1 \frac{m-n}{2n} \left(C_1 \|\nabla\varphi\|^2 + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}} \int_0^t \|f\|^2 d\tau.$$

Отсюда следует

$$\left(1 - F(t)\right)\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}} \leq \left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}},$$

что приводит к оценке

$$\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}} \leq K(t), \quad (15)$$

$$K(t) = \frac{\left(C_1 \|\nabla\varphi\|^2 + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}}{1 - F(t)}.$$

Замечание 2.2. Очевидно, что оценка (15) имеет смысл при $F(t) < 1$, что обеспечивается выполнением неравенства (10).

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим применение полученных оценок для редуцирования нелинейного уравнения (8) к соответствующим линейным уравнениям.

a) и b) Переход к равенствам в (11) и (12) позволяет перейти от (7) к линейному уравнению

$$u_t - \exp\left(K(t)\right)\Delta u = f(x,t), \qquad (16)$$

в котором

$$K(t) = \begin{cases} K_1(t),\ C_1 s + C_2 \ge 1, \\ K_2(t),\ C_1 s + C_2 < 1. \end{cases}$$

c) Полагая в уравнении (7)

$$(C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} = \left(K(t)\right)^{\frac{m}{m-n}},$$

где $K(t)$ – правая часть неравенства (14), получаем линейное уравнение

$$u_t - \left(K(t)\right)^{\frac{m}{m-n}} \Delta u = f(x,t). \qquad (17)$$

d) Полагая в уравнении (7)

$$(C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} = \left(K(t)\right)^{\frac{m}{n-m}},$$

где $K(t)$ – правая часть неравенства (15), получаем линейное уравнение

$$u_t - \left(K(t)\right)^{\frac{m}{n-m}} \Delta u = f(x,t). \qquad (18)$$

3. Пример. Приведем одномерный пример, соответствующий случаю c) теоремы 2. Пусть задача (7), (2) имеет вид

$$u_{tt} - \left(\int_0^1 |u_x|^2\, dx + 1\right)^{-\frac{1}{2}} u_{xx} = xt,$$

$$u(x,0) = \frac{1}{6}x^2(2x-3),\ x \in [0,1],$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, t \in [0,T].$$

Таким образом, в формулировке теоремы 2 имеем

$$\varphi(x) = 0,5x^2,\ f(x,t) = xt, C_1 = C_2 = 1, m = 1, n = 2.$$

Найдем величины, входящие в (14):

$$\int_0^t \|f\|^2\, d\tau = \int_0^t \int_0^1 |x\tau|^2\, dx d\tau = \frac{t^3}{9},$$

$$\|\nabla\varphi\|^2 = \int_0^1 |u_x(x,0)|^2\, dx = \int_0^1 |\varphi_x(x)|^2\, dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$\left(\|\nabla\varphi\|^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}1547,\ K(t) \approx 0{,}02778t^3 + 1{,}1547.$$

После подстановки в (21) получаем линейное уравнение

$$u_t - (0{,}02778t^3 + 1{,}1547)u_{xx} = xt.$$

Заключение. В работе установлены априорные оценки для интегральной нагрузки $a(s) = \left(C_1 s + C_2\right)^{\pm p}, C_1 > 0, C_2 \ge 0,\ p = \dfrac{m}{n}, m, n \in N$, уравнения (1) при условиях (2) и показано их применение к его линеаризации. Положительной степени интегральной нагрузки соответствует оценка (5). Для отрицательной степени рассмотрены случаи $m = n$ с оценками (12) и (13), а также случаи $m < n$ и $m > n$ с оценками (14) и (15) соответственно. Правые части полученных выражений, рассматриваемых как равенства, используются для линеаризации уравнения (1) путем замены ими интегральной нагрузки. Результатом являются уравнения (6), (16), (17), (18). Приводится одномерный пример, иллюстрирующий редукцию нагруженного уравнения к линейному. Решение последнего при исходных начально-краевых условиях может быть принято за первое приближение к решению нагруженной задачи. При $p = \pm 1$ дополнительно установлены оценки нагрузки $(C_1 s + C_2)^p$ и, как следствие, функции $s(t)$ (замечания 1.1 и 2.1). Кроме этого, при $p = 1$ также получена априорная оценка квадрата нормы искомой функции (замечание 1.2). Все полученные результаты целесообразно использовать для доказательства существования и единственности решений рассмотренных задач.

Литература

1. Бернштейн С.Н. Об одном классе функциональных уравнений с частными производными // Изв. АН СССР. Серия матем. 1940. Вып. 1. С. 17–26.

2. Гордезиани Д.Г., Джангвеладзе Т.А., Коршия Т.К. О существовании и единственности решения одного класса нелинейных параболических задач // Дифф. уравн. 1983. Т. 19. № 7. С. 1197–1207.

3. Джангвеладзе Т.А. Первая краевая задача для одного нелинейного уравнения параболического типа // ДАН СССР. 1983. Т. 269. № 4. С. 839–842.

4. Джангвеладзе Т.А. Об одном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа // Дифф. уравн. 1985. Т. 21. № 1. С. 41–46.

5. Лаптев Г.И. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка с интегральными коэффициентами // ДАН СССР. 1987. Т. 293. № 2. С. 306–309.

6. Antunes G., Lopez I.F., da Silva M.D., Medeiros L.A., Biazutti A. Nonlinear Parabolic Equation on Manifolds // Journal of Mathematics Research. 2014. Vol. 6. № 1. P. 85–92. https://doi.org/10.5539/jmr.v6n1p85

7. Dawidowski L. The quasilinear parabolic Kirchhoff equation // Open Math. 2017. Vol. 15. P. 382–392. https://doi.org/10.1515/math-2017-0036

8. Nam D.H.Q., Baleanu D., Luc N.H., Can N.H. On a Kirchhoff diffusion equation with integral condition // Advances in Difference Equations. 2020:617. https://doi.org/s13662-020-03077-y

9. Piskin E., Comet T. Qualitative analysis of solutions for a parabolic type Kirchhoff equation with logarithmic nonlinearity // Open J. Discret. Appl. Math. 2021. Vol. 4(2). P. 1–10. https://doi.org/10.30538/psrp-odam2021.0054

10. Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42. Вып. 2(254). С. 135–176.

11. Бутюгина Е.В., Насибулаева Э.Ш. Исследование процесса диффузии газа между пузырьком в кластере и технической жидкостью // Известия Уфимского научного центра РАН. 2016. № 2. С. 15–21.

12. Бозиев О.Л. Об априорных оценках интегральной нагрузки уравнения Кирхгофа // Прикладная математика и вопросы управления. 2024. № 2. С. 6–17. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.2.01

13. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

References

1. Bernshtein S.N. Ob odnom klasse funktsionalnykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi // Izvestia AN SSSR. Seria matem. 1940, vol. 1, pp. 17–26.

2. Gordeziani D.G., Dzhangveladze T.A., Korshiya T.K. O sushhestvovanii i edinstvennosti resheniya odnogo klassa nelinejny`x parabolicheskix zadach // Differential equations, 1983, vol. 19, no. 7, pp. 1197–1207.

3. Dzhangveladze T. A. Pervaya kraevaya zadacha dlya odnogo nelinejnogo uravneniya parabolicheskogo tipa // DAN SSSR, 1983, vol. 269, no. 4, pp. 839–842.

4. Dzhangveladze T.A. Ob odnom nelineynom integro-differentsial'nom uravnenii parabolicheskogo tipa // Differential equations, 1985, vol. 21, no. 1, pp. 41–46.

5. Laptev G.I. Kvazilineynyye parabolicheskiye uravneniya vtorogo poryadka s integral'nymi koeffitsiyentami // DAN SSSR, 1987, vol. 293, no. 2. pp. 306–309.

6. Antunes G., Lopez I.F., da Silva M.D., Medeiros L.A., Biazutti A. Nonlinear Parabolic Equation on Manifolds. Journal of Mathematics Research, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 85–92. https://doi.org/10.5539/jmr.v6n1p85

7. Dawidowski L. The quasilinear parabolic Kirchhoff equation // Open Math., 2017, vol. 15, pp. 382–392. https://doi.org/10.1515/math-2017-0036

8. Nam D.H.Q., Baleanu D., Luc N.H., Can N.H. On a Kirchhoff diffusion equation with integral condition // Advances in Difference Equations, 2020, 2020:617. https://doi.org/s13662-020-03077-y.

9. Piskin E., Comet T. Qualitative analysis of solutions for a parabolic type Kirchhoff equation with logarithmic nonlinearity // Open J. Discret. Appl. Math, 2021, vol. 4(2), pp. 1–10. https://doi.org/10.30538/psrp-odam2021.0054

10. Kalashnikov A.S. Nekotoryye voprosy kachestvennoy teorii nelineynykh vyrozhdayushchikhsya parabolicheskikh uravneniy vtorogo poryadka // Uspekhi Mat. Nauk, 1987, vol. 42, iss. 2(254), pp. 135–176.

11. Butyugina E.V., Nasibullaeva E.Sh. Numerical study of the gas diffusion process between clustered bubbles and technical fluids // Izvestiya Ufimskogo nauchnogo centra RAN, 2016, no. 2, pp. 15–21.

12. Boziev O.L. On a priori estimates of the Kirchhoff equation integral load // Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya, 2024, no. 2, pp. 6–17. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.2.01

13. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uralceva N.N. Linejnye i kvazilinejnye uravneniya parabolicheskogo tipa. Moscow: Nauka, 1967, 736 p.

ON AN APPROACH TO LINEARIZATION OF A NON-LINEAR EQUATION OF THERMAL CONDUCTIVITY

© O.L. Boziev[1,2]

[1]Institute of Informatics and Regional Management Problems,
37A, ulitsa I. Armand, Nalchik, Russian Federation

[2]Kabardino-Balkarian State University,
173, ulitsa Chernyshevskogo, Nalchik, Russian Federation

The aim of the work is to establish a priori estimates for the integral load of the Kirchhoff parabolic equation. This equation models some nonlinear diffusion processes. In this case, the load is the rational degree m/n of a linear function of the norm of the derivative of the desired solution in the space $H^1(\Omega)$. To achieve this goal, integral transformations of the terms of the scalar product of the original equation and the time derivative of its solution are performed. In this way, a priori inequalities are established that limit the integral load of the Kirchhoff equation to a known function that depends on the right side of the equation and the initial condition, as well as on the sign and type of the exponent. A method is shown for reducing the Kirchhoff equation to a linear equation by replacing the integral load with the right-hand sides of these estimates. An example of such a reduction is given. The established estimates of the integral load and some others accompanying them can be used to prove the existence and uniqueness of solutions to the corresponding problems. The described method of establishing a priori estimates and subsequent reduction of a nonlinear equation to a linear one can be applied to a wide class of loaded equations containing the modulus of the integral of the rational degree of the desired function or its derivative.

Keywords: Kirchhoff parabolic equation, a priori estimation, integral load, reduction to a linear equation.