

УДК 533.2; 534.12

DOI: 10.31040/2222-8349-2026-0-1-5-15

**ВЛИЯНИЕ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ  
УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ**

© М.А. Ильгамов, А.Г. Хакимов, С.В. Дмитриев

Изгибные колебания однослойной углеродной нанотрубки определяются исходя из теории упругих колебаний длинной цилиндрической оболочки, при этом с большой точностью удовлетворяется условие нерастяжимости срединной поверхности. Поверхности оболочки контактируют со средами разной плотности и давления внутри и вне оболочки. Среда может быть сжимаемой в процессе деформации поверхности и несжимаемой. Для газов принимается изотермический закон, а для модели несжимаемой жидкости – постоянство плотности. Заданные статические давления не изменяются в процессе деформации трубки. Используются уравнения движения идеальной несжимаемой и сжимаемой жидкости с разными плотностями и давлениями внутри и вне трубки. Принимается допущение о безотрывном взаимодействии между стенкой трубки и контактирующей средой. Поперечная распределенная сила определяется с учетом изменения элементарных длин на внутренней и внешней поверхностях изогнутой оболочки в соответствии с гипотезой Кирхгофа–Лява о нормали к изогнутой срединной поверхности. Используются условия равенства скоростей идеальной жидкости по нормали и стенки трубки. Исследуется спектр собственных частот радиальных изгибных колебаний длинной замкнутой оболочки с параметрами однослойной углеродной нанотрубки и влияние на них сред внутри и вне ее. Изучена зависимость собственных частот от отношений плотностей и давлений сред, а также материала, толщины стенки и радиуса трубки. Собственные частоты изгибных колебаний нанотрубки в присутствии воды и других жидкостей всегда существенно меньше, чем в вакууме. Это объясняется влиянием присоединенных масс жидкостей внутри трубки и вне. Важными представляются оценки условий возникновения кавитационного взаимодействия между нанотрубкой и жидкостью, так как это приводит к сильному изменению частот колебаний системы по сравнению с безотрывным взаимодействием. По-видимому, это сложное явление еще не рассматривалось. Оно нуждается в экспериментальном изучении. Более точное описание его возможно методом молекулярной физики и численного моделирования. Здесь даны некоторые оценки этого явления в случае контакта колеблющейся однослойной нанотрубки, находящейся в воде. Полученные результаты имеют значение и для цилиндрических оболочек макроразмеров. Влияние контактирующей среды является значительным на частоту колебаний в случае тонких оболочек из материала с низким модулем упругости.

Ключевые слова: углеродная нанотрубка, цилиндрическая оболочка, газ, давление, плотность, присоединенная масса.

**Введение.** Рассмотрению колебаний упругих пластин и оболочек, контактирующих с жидкостью и газом, посвящена обширная литература [1–7]. Изучены различные аспекты задачи. Например, в [1] представлен метод, позволяющий определять частоты колебаний цилиндрических оболочек бесконечной длины в акустической среде. Показано, что существует низкая частота, когда излучение не происходит, и высокая частота, когда происходит излучение. Резонанс возникает только в первом из указанных

диапазонов. Метод требует только модификации для учета эффекта статического давления в окружающей среде. Работа [4] посвящена аналитическому и численному исследованиям свободных колебаний. Дан сравнительный анализ результатов, полученных с использованием моделей сжимаемой и несжимаемой среды. Делается вывод, что для решения практических задач, требующих учета полного спектра собственных частот системы оболочка-среда, должна использоваться модель сжимаемой среды.

ИЛЬГАМОВ Марат Аксанович – д.ф.-м.н., член-корр. РАН, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, e-mail: ilgamov@anrb.ru

ХАКИМОВ Аким Гайфуллинвич – к.ф.-м.н., Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, e-mail: hakimov@anrb.ru

ДМИТРИЕВ Сергей Владимирович – д.ф.-м.н., Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, e-mail: dmitriev.sergey.v@gmail.com

В анализе собственных колебаний замкнутой цилиндрической оболочки рассматриваются случаи конечной и бесконечной длины. В последнем случае наиболее подробно изучены колебания с образованием волн только по окружной координате. Показано, что при этом с большой точностью удовлетворяется условие нерастяжимости срединной поверхности. При этом элементарная длина  $ds$  по окружности равна

$$ds = R d\theta \approx R_* d\theta_*, \quad (1.1)$$

где радиус срединной поверхности  $R$  и угол  $\theta$  относятся к состоянию без деформации, а  $R_*$ ,  $\theta_*$  – при деформации. Уравнение движения относительно кривизны  $\kappa$  и радиального перемещения  $w(\theta, t)$  имеет вид [1–7]

$$\frac{\partial^4 \kappa}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} - \frac{TR^2}{D} \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + \frac{\rho h R^4}{D} \left( \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} - \ddot{w} \right) = \frac{R^4}{D} \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (1.2)$$

где  $h$ ,  $\rho$ ,  $D$  – толщина стенки, плотность и изгибная жесткость, точка над буквой означает производную по времени  $t$ ,  $T$  – окружное усилие,  $q$  – распределенная поперечная сила. При записи (1.2) использовано условие нерастяжимости срединной поверхности, равносильное (1.1). Из него следуют равенство нулю деформации срединной поверхности и упрощенные выражения для изменения кривизны  $\kappa$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = -w, \quad \kappa = \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w, \quad (1.3)$$

где  $v$  – перемещение в окружном направлении.

По этому уравнению изучены свободные, вынужденные и параметрические колебания замкнутых оболочек, цилиндрических панелей с произвольным углом раствора, арок, колец из изотропных и ортотропных материалов. Естественно, основные исследования со времен Релея [8] по колебаниям оболочек выполнены без учета среды, контактирующей с ее стенками. Также в работах обзора [9] по задачам диагностики повреждений элементов конструкций по собственным частотам колебаний не учитывается влияние окружающей среды.

В анализе динамики микро- и нанотрубок в последние десятилетия наряду с экспериментами и методами молекулярной динамики нашли применение разные модели теории тонкостенных упругих оболочек. Эти исследования были стимулированы, в частности, применением микро- и нанопленок, нанопроволок, нанотру-

бок в качестве детекторов и сенсоров в химии, биологии и т.д. [10–12].

Наиболее близким к предмету настоящего анализа является статья [13], поэтому рассмотрим ее более подробно. В ней изучен спектр собственных частот цилиндрической тонкостенной оболочки с параметрами одностенной нанотрубки с волнообразованием по окружности и по длине. Учитывается сжимаемость жидкости. Рассматриваются осесимметричные и неосесимметричные движения, которые разделяются на преимущественно радиальные, продольные волны, а также на волны вращения вокруг оси цилиндра. При значениях модуля упругости  $E = 500$  МПа, плотностях трубки и воды  $\rho = 1.47 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_f = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, радиуса срединной поверхности и толщины  $R = 12.8$  нм,  $h = 2.7$  нм показаны различные сценарии движения. В частности, при длине продольной волны, большей, чем десять диаметров оболочки, частоты преимущественно радиальных колебаний не зависят от продольной деформации. При длинах продольных волн, меньших диаметра, частота с образованием двух волн по окружности мало зависит от контакта стенки с водой.

В данной работе рассматривается спектр собственных частот радиальных изгибных колебаний длинной замкнутой оболочки с параметрами однослойной углеродной нанотрубки и влияние на них сред внутри и вне ее. При этом будем пользоваться уравнениями движения идеальной несжимаемой и сжимаемой жидкости с разными плотностями и давлениями сред внутри и вне трубки. Важным представляется выяснение влияния сред по указанным моделям в случае трубки микро- и наноразмеров, пределов применимости модели безотрывного взаимодействия стенок трубки и жидкости, возможности их кавитационного взаимодействия.

**Постановка задачи.** Нанотрубка образована зигзагообразным рядом атомов углерода по окружности [14]. На ее внутреннюю и внешнюю поверхности действуют равномерные статические давления  $p_1$ ,  $p_2$ . Они связаны с плотностями сред  $\rho_1$  и  $\rho_2$  уравнениями состояния. Для газов будем принимать изотермический закон, а для модели несжимаемой жидкости – постоянство плотности. Заданные статические давления  $p_1$ ,  $p_2$  не изменяются в процессе деформации трубки.

Ввиду принятого выше предположения об отсутствии волнообразования в продольном

направлении и равномерного статического давления по всей поверхности трубки объектом исследования может быть принято кольцо с эффективными значениями радиуса  $R$ , толщины  $h$ , ширины  $b$ , плотности по площади  $\rho h$ , модуля упругости  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ . Расстояние между соседними атомами в окружном направлении равно  $a = l \cos 30^\circ = 0.123$  нм, где  $l$  – расстояние между зигзагообразно расположенными атомами, образующими кольцо (рис. 1). Площадь  $S$ , приходящаяся на один атом, через это расстояние определяется по соотношению  $4S = 3\sqrt{3}l^2$  [15]. Так как масса атома углерода равна  $m = 1.99 \cdot 10^{-26}$  кг, то эффективная плотность по площади равна

$$\rho h = mS^{-1} = 0.76 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2}. \quad (2.1)$$

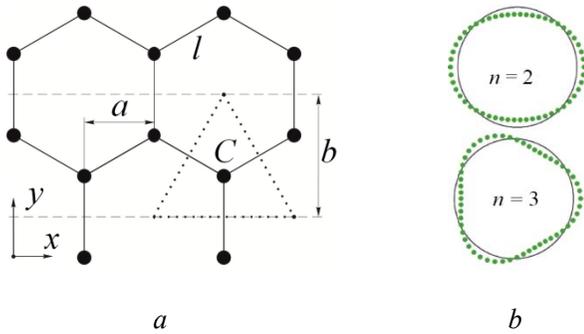


Рис. 1:  $a$  – кольцо шириной  $b$ , образованное двумя поперечными сечениями углеродной нанотрубки. Площадь, приходящаяся на один атом  $C$ , показана пунктирными линиями (равносторонний треугольник);  $b$  – гармоники изгибных колебаний углеродной нанотрубки, соответствующие номерам  $n = 2, 3$

Значения модуля упругости и толщины однослойного графена оцениваются в широких пределах:  $E = (1 \div 5)10^6$  МПа,  $h = 0.07 \div 0.34$  нм [15]. Эти данные получены экспериментально, а также с привлечением теоретического моделирования. Разброс значений  $E$  и  $h$  объясняется разными образцами для испытаний, аппаратурой, методами определения и т.д. Эффективный радиус  $R$  определяется через число атомов  $N$ , образующих кольцо, по формуле  $R = a [2 \sin(\pi/N)]$  для хиральности зигзаг.

Исходя из приведенных параметров трубки для описания радиальных колебаний в условиях плоской деформации будем пользоваться уравнением (1.2). Без учета давлений сред  $p_1, p_2$  и соответствующих плотностей (следовательно,

$T = 0, q = 0$ ) по нему в [14] определен спектр частот изгибных колебаний, который сравнивался со спектром, найденным по цепной модели в молекулярной динамике. При этом в (1.2) кроме эффективного радиуса  $R$  остается лишь один параметр

$$\xi = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}. \quad (2.2)$$

Подобный параметр вводится в работах [14]. Его численное значение определено по эффективным значениям  $E, \nu, \rho$  и равняется  $\xi = 600$  нм<sup>2</sup>/нс. Оценка  $\xi = 656$  нм<sup>2</sup>/нс основана на континуальной теории оболочек. Существует и экспериментальная оценка этого параметра, равного  $\xi = 673$  нм<sup>2</sup>/нс и близкого к теоретическому значению  $\xi = 682$  нм<sup>2</sup>/нс. В [14] при условии  $N > 100$  найдено  $\xi = 582$  нм<sup>2</sup>/нс. По последней величине  $\xi$  и соотношениям (2.1), (2.2) определяем значение изгибной жесткости стенки нанотрубки  $D = \xi^2 \rho h = 25.65 \cdot 10^{-20}$  кг(нм/нс)<sup>2</sup>.

Если исходить из этого значения  $D$  и приведенных выше значений  $E(1 - \nu^2)^{-1} = (1 \div 5) \cdot 10^6$  МПа, то эффективная толщина изменяется в пределах

$$h = \left[ \frac{12(1-\nu^2)D}{E} \right]^{\frac{1}{3}} = (0.08 \div 0.14) \text{ нм}.$$

Этот интервал сужает приведенный выше разброс  $h$  из литературы и представляется вполне обоснованным, поскольку определяется исходя из значений известной плотности по площади графена (2.1) и параметра  $\xi$ , найденного по моделированию по соотношениям молекулярной динамики и континуальной механики. Заметим, при  $E(1 - \nu^2)^{-1} = 3 \cdot 10^6$  МПа толщина  $h = 0.1$  нм.

Окружная сила определяется из уравнения

$$\begin{aligned} T &= (p_1 + \bar{p}_1) \int_0^{\pi/2} \left( R_* - \frac{h}{2} \right) \cos \theta_* d\theta_* - \\ &- (p_2 + \bar{p}_2) \int_0^{\pi/2} \left( R_* + \frac{h}{2} \right) \cos \theta_* d\theta_* = \\ &= (p_1 - p_2)R - p_m h + \bar{T}(\kappa_*, \bar{p}_1, \bar{p}_2), \\ p_m &= \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$  – давления на внутреннюю и внешнюю поверхности стенки, возникающие при ее движении,  $\bar{T}$  – окружная сила, обусловленная изгибом и зависящая от прогиба  $w$ , так как

$\kappa_*$ ,  $\bar{p}_1$ ,  $\bar{p}_2$  есть функции  $w$  ( $R_* = R + w$ ). В уравнении движения (1.2) сила  $T$  умножается на изменение кривизны, поэтому член с  $\bar{T}$  является нелинейным, в связи с чем в дальнейшем поправка  $\bar{T}$  к окружной силе не учитывается.

Поперечную распределенную силу  $q$  определяем с учетом изменения элементарных длин на внутренней и внешней поверхностях изогнутой оболочки в соответствии с гипотезой Кирхгоффа–Лява о нормали к изогнутой срединной поверхности

$$ds_1 = \left( R_* - \frac{h}{2} \right) d\theta_*, ds_2 = \left( R_* + \frac{h}{2} \right) d\theta_*.$$

С учетом (1.1) получаем

$$ds_1 = \left( 1 - \frac{h}{2} \left( \frac{1}{R} - \kappa \right) \right) R d\theta,$$

$$ds_2 = \left( 1 + \frac{h}{2} \left( \frac{1}{R} - \kappa \right) \right) R d\theta.$$

Поперечная сила на элемент  $ds$  срединной поверхности равна  $q ds = (p_0 + p_1 + \bar{p}_1) ds_1 - (p_0 + p_2 + \bar{p}_2) ds_2$ . Подставляя сюда значения  $ds_1$ ,  $ds_2$ , с учетом (1.3), получаем

$$q = p_1 - p_2 + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \left( p_m + \bar{p}_m \right) \frac{h}{R} + \frac{p_m h}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right), \quad \bar{p}_m = \frac{\bar{p}_1 + \bar{p}_2}{2}. \quad (2.4)$$

Из (1.2), (1.3), (2.2) – (2.4) находим уравнение

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{(p_1 - p_2) R^3}{D} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{R^4}{\xi^2} \left( \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} - \ddot{w} \right) = \frac{R^4 \partial^2 (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{D \partial \theta^2}. \quad (2.5)$$

Здесь исключены нелинейные члены. В составе четвертого члена и правой части одинаковые величины, содержащие средние давления  $p_m$ , сокращены. Это является особенностью замкнутой цилиндрической оболочки. Если она является незамкнутой (цилиндрическая панель произвольного угла раствора), то в уравнение (2.5) входит и член, содержащий  $p_m$ .

Исходя из структуры уравнения (1.2) и в отличие от (2.3) в выражении (2.4) сохранен член, содержащий функцию прогиба. Так как  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$  зависят от  $w$ , то нелинейным является член с  $\bar{p}_m$ , умноженный на изменение кривизны. Поэтому он в (2.4) не учтен. Как будет видно из дальнейшего,  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$  – величины, близкие

по амплитуде, имеют разные знаки. Ввиду этого член с  $\bar{p}_m$  в (2.4) можно не учитывать.

Условия равенства скоростей идеальной жидкости по нормали и стенки трубки имеют вид

$$\frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial r} = - \frac{\partial w}{\partial t} \left( R_* \mp \frac{h}{2}, \theta_* \right), \quad (2.6)$$

где  $\varphi_{1,2}$  – потенциал скорости для внутренней и внешней областей. В скобках указаны координаты точек в областях, занимаемых жидкостями, куда приходят фиксированные точки поверхностей стенки при деформации. Так как  $R_* = R + w$ ,  $\theta_* = \theta + v/R$ , то левые части (2.6) можно записать

$$\frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial r} + w \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial r^2} + \frac{v}{R} \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial r \partial \theta} \left( R \pm \frac{h}{2}, \theta \right).$$

Поэтому в линейной задаче в условиях (2.6) принимаем их выполнение при  $R \mp h/2, \theta$ . Если считать размер  $h/2$  малым по сравнению с  $R$ , то условие (2.6) ставится при  $R$ . То же самое относится к определению давлений  $\bar{p}_{1,2} = -\rho_{1,2} \partial \varphi_{1,2} / \partial t$ . По второму варианту имеем

$$\frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial r} \mp \frac{h}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial r^2} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (2.7)$$

$$\bar{p}_{1,2} = -\rho_{1,2} \left( \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial t} \mp \frac{h}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial t \partial r} \right).$$

Потенциал скорости определяется из уравнений [1–3]

$$\frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial r^2} + \frac{\partial \varphi_{1,2}}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{c_{1,2}^2 \partial t^2} = 0, \quad (2.8)$$

$$c_{1,2}^2 = k_{1,2} \frac{p_{1,2}}{\rho_{1,2}},$$

где  $c_{1,2}$  – скорость звука,  $k_{1,2}$  – коэффициент адиабаты.

Решение уравнения для внутренней области должно удовлетворять условию ограниченности возмущений при  $r = 0$ , а для внешней области – условию затухания на удалении от трубки ( $\partial \varphi_2 / \partial r = 0$  при  $r = \infty$ ).

**Контакт нанотрубки с несжимаемой средой.** По модели несжимаемой жидкости в уравнении (2.8) нужно опустить последний член в левой части. Жидкость и газ предполагаются несжимаемыми при определении динамических давлений  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$ . В то же время статические давления  $p_1$  и  $p_2$  и плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$

сред определяются изотермическим законом для сжимаемых сред.

Примем решение уравнения (2.5) в виде периодических функций по окружной координате и по времени

$$w = W_n \cos n\theta \sin \omega t, \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (3.1)$$

Тогда в функциях потенциала скорости

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \Phi_{1n}(r) \cos n\theta \cos \omega t, \\ \varphi_2 &= \Phi_{2n}(r) \cos n\theta \cos \omega t \end{aligned} \quad (3.2)$$

по (2.8) имеем  $\Phi_{1n}(r) = A_{1n} r^n, \Phi_{2n}(r) = A_{2n} r^{-n}$ .

При этом удовлетворяются условия ограниченности решения при  $r = 0$  и затухания при  $r = \infty$ .

Подставляя выражения (3.1), (3.2) с учетом  $\Phi_{1n}$  и  $\Phi_{2n}$  в условия (2.7) относительно скоростей, получаем

$$\begin{aligned} A_{1n} &= -\frac{2W_n \omega R^{2-n}}{n(2R - nh + h)}, \\ A_{2n} &= \frac{2W_n \omega R^{n+2}}{n(2R - nh - h)}. \end{aligned}$$

С учетом оценки  $h/(2R) \ll 1$  здесь такое отношение отброшено, но отношение  $nh/(2R)$  сохранено, так как число  $n$  может быть порядка 10 и более.

Выражения (3.2) через амплитуду прогиба  $W_n$  приобретают вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{2W_n \omega R^{2-n} r^n}{n(2R - nh)} \cos n\theta \cos \omega t, \\ \varphi_2 &= \frac{2W_n \omega R^{n+2} r^{-n}}{n(2R - nh)} \cos n\theta \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3.3)$$

С учетом (3.2), (3.3) динамические давления на поверхностях оболочки можно выразить через параметры движения

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= -\rho_1 \omega^2 W_n R n^{-1} \cos n\theta \sin \omega t, \\ \bar{p}_2 &= \rho_2 \omega^2 W_n R n^{-1} \cos n\theta \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Исходя из (3.1) – (3.3) выражения (3.4) можно представить через функцию прогиба  $w(\theta, t)$

$$\bar{p}_1 = \frac{\rho_1 R}{n} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \bar{p}_2 = -\frac{\rho_2 R}{n} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (3.5)$$

Подставляя (3.5) и (3.1) в уравнение (2.5), получим

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{\Omega_n^2}{1 + \mu_n} \left( 1 + \frac{3\eta}{n^2 - 1} \right), \quad \Omega_n^2 = \frac{n^2 (n^2 - 1)^2 \xi^2}{(n^2 + 1) R^4}, \\ \eta &= \frac{p_1 - p_2}{p_2^*}, \quad p_2^* = \frac{3D}{R^3}, \quad \mu_n = \frac{(\rho_1 + \rho_2) n R}{(n^2 + 1) \rho h}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $\Omega_n$  – собственные частоты при нулевых значениях  $p_1, p_2, \rho_1, \rho_2$  в вакууме),  $p_2^*$  – критическое значение наружного давления. Так как выше было определено численное значение  $D$ , то  $p_2^*$  может быть выражено только через радиус  $p_2^* = 77 \cdot 10^{-20} \cdot R^{-3}$  кг (нм/нс)<sup>2</sup> (здесь значение  $R$  в нм). Параметры  $\eta, \mu_n$  определяют влияние на частоты перепада давлений и отношения плотностей окружающих сред и стенки трубки. Как видно из (3.6), внутренний перепад давлений ( $p_1 > p_2, \eta > 0$ ) повышает, а внешний ( $p_1 < p_2, \eta < 0$ ) понижает собственные частоты. Для высоких гармоник  $n$  это влияние уменьшается. Независимо от значений давлений при их равенстве ( $p_1 = p_2, \eta = 0$ ) имеется только снижение частот по сравнению с ними в условиях вакуума. В общем случае снижение частот имеет место при  $(n^2 - 1)\mu_n > 3\eta$ . Через исходные параметры и значение  $\xi = 581$  нм<sup>2</sup>/нс это условие приводится к виду

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho_1 + \rho_2} < \frac{n(n^2 - 1)\xi^2}{(n^2 + 1)R^2}, \quad (3.7)$$

где правая часть представляет собой число с размерностью (нм/нс)<sup>2</sup>, зависящее только от радиуса и номера гармоники  $n$ . Условие снижения частот (3.7) может быть выражено также через число атомов  $N$  по формуле  $R = aN/(2\pi)$  для хиральности зигзаг

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho_1 + \rho_2} < \frac{8.8 \cdot 10^{-4} n(n^2 - 1)}{N^2(n^2 + 1)}. \quad (3.8)$$

В том случае, когда  $(n^2 - 1)\mu_n = 3\eta$ , нет изменения частот. Это равенство может выполняться для одной гармоники, например,  $n = 2$ . При этом для высших гармоник оно не будет удовлетворяться. Тогда не будет равенства  $\omega_n = \Omega_n$  при  $n \geq 3$ .

Проведем некоторые качественные оценки влияния входных параметров на собственные частоты. Условием отсутствия влияния контактирующих сред при  $p_1 = p_2$  (при этом может быть  $\rho_1 \neq \rho_2$ , например, для разных газов) является  $\mu_n \ll 1$ . Условно примем  $\mu_n = 10^{-2}$ . Определим значения радиусов  $R_c$ , ниже которых нанотрубка «не чувствует» окружающую среду

$$R_c = \frac{(n^2 + 1)\rho h}{100(\rho_1 + \rho_2)}. \quad (3.9)$$

Так как толщина  $h = 0.1$  нм стенки задана, то  $R_c$  зависит только от отношений плотностей трубки и сред, а также от номера гармоники.

Принимаем значение  $\rho h$  по (2.1). В случае воды  $\rho_1 = \rho_2 = 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Для  $n = 2$  и  $n = 10$  получаем из (3.9) значения  $R_c = 0.01 \text{ нм}$  и  $R_c = 0.10 \text{ нм}$ , которые меньше даже толщины  $h$  (когда не приходится говорить об оболочке). Таким образом, собственные частоты изгибных колебаний нанотрубки, контактирующей с водой по обеим поверхностям, при всех радиусах и числах атомов, образующих кольцо, меньше, чем в вакууме.

В случае воздуха при температуре  $20^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении ( $\rho_1 = \rho_2 = 1.29 \text{ кг/м}^3$ )  $R_c = 3.45 \text{ нм}$  ( $n = 2$ , соответствующее число атомов  $N = 176$ ) и  $R_c = 34.48 \text{ нм}$  ( $n = 10$ ). Итак, если радиус нанотрубки в воздухе равен, например,  $3 \text{ нм}$ , то нет влияния воздуха на частоты по всем гармоникам. При радиусе  $3.5 \text{ нм}$  влияние воздуха есть для гармоники  $n = 2$ , но нет влияния на колебания по более высоким гармоникам и т.д.

При тех же условиях для гелия ( $\rho_1 = \rho_2 = 0.17 \text{ кг/м}^3$ )  $R_c = 59 \text{ нм}$ . Понижающее влияние на частоты имеется только при  $R_c > 60 \text{ нм}$ .

При повышении давления в газах и соответствующего изотермического увеличения их плотностей оценки изменяются. Например, при  $p_1 = p_2 = 20 \text{ МПа}$  плотность гелия возрастает в 200 раз и соответствующая плотность  $\rho_1 = \rho_2 = 34 \text{ кг/м}^3$  и  $R_c \approx 0.3 \text{ нм}$  ( $n = 2$ ). Таким образом, в указанных условиях пренебрегать влиянием на частоты нанотрубки даже легких газов нельзя. Поэтому контакт со всеми другими газами приводит к понижению частот при всех радиусах трубки.

Расчеты проведены для углеродной нанотрубки с модулем упругости  $E = 0.972 \cdot 10^6 \text{ МПа}$ , коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.278$  и толщиной  $h = 0.052 \text{ нм}$ . При этом  $\xi = 127 \text{ нм}^2/\text{нс}$ , а для  $\xi = 582 \text{ нм}^2/\text{нс}$  толщина  $h = 0.143 \text{ нм}$  (рис. 2–4).

На рис. 2 дается зависимость отношения частот  $\omega_2/\Omega_2$  для  $n = 2$  от радиуса  $R$  (нм) для воды и разных газов при давлениях  $p_1 = p_2 = 10 \text{ МПа}$  и соответствующих плотностях. Диапазон изменения радиуса углеродной нанотрубки охватывает изменение хиральности от (5.5) до (200, 200).

Так как внутренний перепад давлений ( $p_1 > p_2$ ) увеличивает частоты, то это может уравновесить их падение из-за присоединенной массы. Пусть  $p_2 = 0$ ,  $\rho_2 = 0$ ,  $\rho_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $R = 10 \text{ нм}$ . Для  $n = 2$  из (3.7) получаем значение давления  $p_1 = 6\rho_1\xi^2/(5R^2) = 4 \text{ МПа}$ , при котором не происходит изменения низшей частоты ( $\omega_2 = \Omega_2$ ). При этом высшие частоты будут ниже ( $\omega_n < \Omega_n$ ),

так как в (3.7) множитель  $6/5$  (при  $n = 2$ ) будет равен  $2.4$  ( $n = 3$ ) и т.д.

В отличие от внутреннего перепада влияние внешнего перепада ( $p_1 < p_2$ ) складывается с фактором присоединенной массы среды, в результате все частоты  $\omega_n$  меньше по сравнению с  $\Omega_n$ .

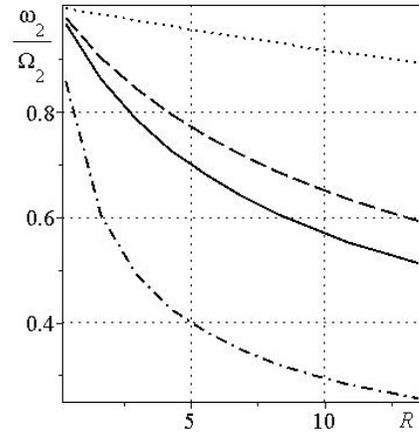


Рис. 2. Зависимость отношения частот второй гармоники углеродной нанотрубки к частоте колебаний в вакууме:  $\rho_1 = 1000$  (вода),  $0.17$  (гелий),  $1.29$  (воздух),  $1.97$  (двуокись углерода)  $\text{кг/м}^3$ , (штрих – пунктирная, пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно)

Во всех работах по взаимодействию сред и тонкостенных элементов конструкций и здесь анализ опирается на предположение безотрывного движения сред от стенки. В случае газов, которые легко расширяются, это допущение оправдано. Однако в случае жидкостей, очищенных от примесей и мельчайших пузырьков, возможен отрыв их от стенки и режим кавитационного взаимодействия среды и стенки. Оценим эту возможность в случае контакта стенки с водой по внешней поверхности, полагая внутри трубки  $p_1 = 0$ ,  $\rho_1 = 0$ . Примем  $n = 2$ ,  $R = 2 \text{ нм}$ ,  $h/R \ll 1$ , давление атмосферное  $p_2 = 0.1 \text{ МПа}$ , плотность  $\rho_2 = 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

Динамическое давление  $\bar{p}_2$  согласно (3.4) равно

$$\bar{p}_2 = \frac{1}{2} \rho_2 \omega_2^2 R W_2 \cos 2\theta \sin \omega_2 t. \quad (3.10)$$

Здесь индексы у  $\bar{p}_2$ ,  $\rho_2$  указывают на параметры внешней области, а у  $\omega_2$ ,  $W_2$  – номер гармоники. Целью анализа является установление максимального отрицательного динамического давления  $\bar{p}_2$  в моменты времени, когда  $\sin \omega_2 t = -1$ . Сначала определим  $\omega_2^2$  по (3.6) при принятых

данных. Критическое давление по (3.6) равно  $p_2^* = 96$  МПа. Поэтому параметр  $\eta = p_2/p_2^* \ll 1$  и отбрасывается по сравнению с единицей в (3.6). Однако параметр  $\mu_2 \approx 1$  и поэтому сохраняется в (3.6).

Таким образом, в данном примере влияние присоединенной массы сохраняется, а давления – нет. Собственные частоты равны  $\Omega_2 = 390$  рад/нс,  $\omega_2 = 275$  рад/нс ( $f_2 = \omega_2/2\pi = 43.0$  ГГц). При этом максимальная скорость движения стенки  $\partial w/\partial t = \pm W_2 \omega_2 \cos 2\theta$  в моменты  $\cos \omega_2 t = \pm 1$  (когда стенка переходит через недеформированное положение) и равна  $270 W_2 \cos 2\theta$  нс<sup>-1</sup>. По (3.10) максимальные значения давления  $p_2 \approx \pm 76 W_2 \cos 2\theta$  МПа/нм получаются в моменты  $\sin \omega_2 t = \pm 1$  (когда движущаяся стенка занимает крайние положения). Амплитуда перемещения стенки задается начальными условиями, например,  $W_2 = h/5$ ,  $\partial W_2/\partial t = 0$ , где толщина стенки  $h = 0.1$  нм. Тогда максимальные значения скорости по углу и времени  $\pm 5.5$  м/с, а давления  $\bar{p}_2 = \pm 1.46$  МПа.

Давление с переменными знаками возникает в пределах полуволны ( $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ ) на внешней поверхности трубки за каждый цикл колебаний. Динамические напряжения растяжения сверх принятого статического давления  $p_2 = 0.1$  МПа свидетельствует о возможности отрыва жидкости от стенки. В силу значительного превышения  $\bar{p}_2$  над статическим давлением  $p_2 = 0.1$  МПа в данном примере отрыв происходит почти по всей длине полуволны изгиба трубки за исключением малых зон около узлов ( $\theta = \pm \pi/4$ ).

Картина движения состоит в том, что в фазе положительного перемещения стенки (от центра кольца) и сжатия жидкости ее прилегающий слой отодвигается от недеформированной круговой формы. При обратном движении стенки (к центру) жидкость ввиду своей большой инерционности не успевает за стенкой, в результате возникают напряжения растяжения и образуется кавитационный слой вдоль стенки. Оторвавшаяся граница жидкости ввиду малой скорости не успевает заметно продвинуться за время периода колебаний, когда стенка снова приходит к крайнему положению. Если этот режим реализуется, то колеблющаяся нанотрубка все время находится внутри кавитационной полости, возможно, разделенной узлами колебаний. Отметим, учет сжимаемости жидкости может внести некоторые изменения в этих оценках.

**Контакт нанотрубки с сжимаемой средой.** Функции прогиба и потенциала скорости сохраняются в виде (3.1) и (3.2). Тогда из волнового уравнения (2.8) следует

$$\Phi_{1,2} = A_{1n,2n} J_n \left( \frac{\omega r}{c_{1,2}} \right) + B_{1n,2n} Y_n \left( \frac{\omega r}{c_{1,2}} \right), \quad (4.1)$$

где  $J_n, Y_n$  – функции Бесселя первого и второго рода. Положив  $B_{1n} = 0, A_{2n} = 0$  в соответствии с указанными выше условиями, получаем частное решение

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_{1n} J_n \left( \frac{\omega r}{c_1} \right) \cos n\theta \cos \omega t, \\ \varphi_2 &= B_{2n} Y_n \left( \frac{\omega r}{c_2} \right) \cos n\theta \cos \omega t. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Исходя из оценок, приведенных в предыдущем разделе, при определении статической поперечной силы  $q$  будем учитывать условия на  $r = R \pm h/2$ , а при определении  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$  на поверхности  $r = R$ . Тогда получаем следующие выражения

$$\begin{aligned} A_{1n} &= -\frac{W_n \omega R}{n f_1}, \quad B_{2n} = \frac{W_n \omega R}{n f_2}, \\ f_1 &= \left( n - \frac{n^2 h}{2R} + \frac{\omega^2 h R}{2c_1^2} \right) J_n \left( \frac{\omega R}{c_1} \right) - \frac{\omega R}{n c_1} J_{n+1} \left( \frac{\omega R}{c_1} \right), \\ f_2 &= -\left( n + \frac{n^2 h}{2R} - \frac{\omega^2 h R}{2c_2^2} \right) Y_n \left( \frac{\omega R}{c_2} \right) + \frac{\omega R}{n c_2} Y_{n+1} \left( \frac{\omega R}{c_2} \right). \end{aligned}$$

Вместо (3.4) получаем

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= -\rho_1 \omega^2 R W_n f_{11} \cos n\theta \sin \omega t, \\ \bar{p}_2 &= \rho_2 \omega^2 R W_n f_{22} \cos n\theta \sin \omega t, \\ f_{11} &= \frac{f_{10}}{f_1}, f_{10} = \left( 1 - \frac{nh}{2R} \right) J_n \left( \frac{\omega R}{c_1} \right) + \frac{\omega h}{2c_1} J_{n+1} \left( \frac{\omega R}{c_1} \right), \\ f_{22} &= \frac{f_{20}}{f_2}, f_{20} = \left( 1 + \frac{nh}{2R} \right) Y_n \left( \frac{\omega R}{c_2} \right) - \frac{\omega h}{2c_2} Y_{n+1} \left( \frac{\omega R}{c_2} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Так же, как в (3.5), выражения для динамических давлений могут быть представлены в виде

$$\bar{p}_1 = \rho_1 f_{11} R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \bar{p}_2 = -\rho_2 f_{22} R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (4.4)$$

По модели несжимаемой жидкости ( $c_1, c_2 \rightarrow \infty$ ) получаем  $f_{11} = n^{-1}, f_{22} = n^{-1}$ . Тогда (4.3) и (4.4) совпадают с (3.4) и (3.5). С учетом (4.3), (4.4) правая часть уравнения (2.5) в рассматриваемом случае сжимаемой жидкости равна  $(-\rho_1 f_{11} + \rho_2 f_{22}) R^4/D$ . Пренебрегая величиной  $h(2R)^{-1}$  по сравнению с единицей получаем

$$\omega_n^2 = \frac{\Omega_n^2}{1 + \tilde{\mu}_n} \left( 1 + \frac{3\eta}{n^2 - 1} \right), \tilde{\mu}_n = \frac{\mu_n n (\rho_1 f_{11} - \rho_2 f_{22})}{\rho_1 + \rho_2}, \quad (4.5)$$

где  $\Omega_n$ ,  $\mu_n$  – собственные частоты и параметр присоединенной массы в модели несжимаемой жидкости даются формулами (3.6). Таким образом, учет сжимаемости жидкости не приводит к изменению собственных частот в зависимости от перепада давлений, а меняет только параметр присоединенной массы.

Для решения уравнения (4.5) в случае сжимаемой жидкости применяется метод последовательных приближений. Принимается, что нулевое приближение  $f_{11}^{(0)} = f_{11n}$ ,  $f_{22}^{(0)} = f_{22n}$ , и из уравнения (4.4) находится круговая частота колебаний первого приближения  $\omega_n^{(1)}$ . По полученной частоте первого приближения  $\omega_n^{(1)}$  находится первое приближение  $f_{11}^{(1)}$ ,  $f_{22}^{(1)}$  и так далее. Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока не удовлетворится условие  $|\omega_n^{2(k+1)} - \omega_n^{2(k)}| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  наперед заданная малая величина.

На рис. 3, а приводятся зависимости первой частоты изгибных колебаний углеродной нанотрубки  $f_2$  (ГГц) от радиуса для давлений  $p_1 = p_2 = 10$  МПа и параметров: модуля упругости  $E = 0.972 \cdot 10^6$  МПа, коэффициента Пуассона  $\nu = 0.278$  и толщины  $h = 0.052$  нм. Из рис. 3, а видно, что с ростом радиуса собственная частота колебаний уменьшается, причем влияние сжимаемости не является значительным. На рис. 3, б приводится зависимость первой частоты изгибных колебаний углеродной нанотрубки от радиуса по формулам для сжимаемой жидкости для разных газов. Из него видно, что с уве-

личением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний.

На рис. 4 приведены зависимости первой частоты изгибных колебаний трубки  $f_2$  (ГГц) от давления для двуокиси углерода. С увеличением внутреннего давления  $p_1$  частоты растут, а с увеличением внешнего давления  $p_2$  частоты уменьшаются.

Рассмотрим влияние сжимаемости на явление кавитации воды на колеблющейся внешней поверхности, как это было сделано в случае модели несжимаемой жидкости. Вместо динамического давления (3.10) теперь в соответствии с (4.3) имеем

$$\bar{p}_2 = \rho_2 R W_2 \omega_2^2 f_{22} \cos 2\theta \sin \omega_2 t,$$

где индексы у  $\bar{p}_2, \rho_2$  относятся к внешней области, а у  $W_2, \omega_2$  – к гармонике  $n = 2$ ,  $f_{22}$  дана в (4.3). По принятым выше числовым данным в моменты  $\sin \omega_2 t = \pm 1$  эта формула дает максимальные значения  $\bar{p}_2 = \pm 1.41$  МПа (по модели несжимаемой жидкости  $\pm 1.46$  МПа).

Таким образом, учет сжимаемости незначительно изменяет динамическое давление на поверхности трубки. В линейной задаче колебаний образующиеся равные объемы между недеформированной поверхностью трубки и изогнутой поверхностью к центру и от центра приводят к перетеканию жидкости между соседними полуволнами (по углу  $\theta$ ). При этом жидкость не подвергается объемному растяжению – сжатию за период колебаний стенки. В силу этого изложенное выше явление кавитации жидкости на внешней поверхности трубки по модели несжимаемой жидкости остается без изменения и по модели сжимаемой жидкости.

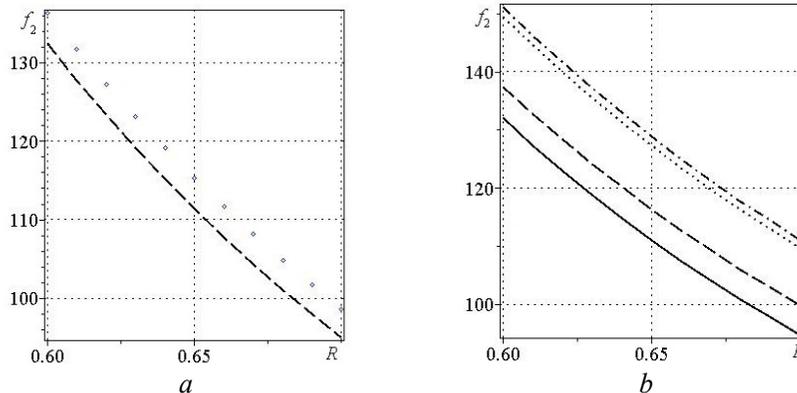


Рис. 3. Зависимость первой частоты изгибных колебаний углеродной нанотрубки  $f_2$  (ГГц) от радиуса  $R$  (нм) для давлений  $p_1 = p_2 = 10$  МПа: а – для двуокиси углерода ( $\rho_1 = 1.97$  кг/м<sup>3</sup>) по формулам для несжимаемой и сжимаемой жидкостей (пунктирная, штриховая линии соответственно); б – по формулам для сжимаемой жидкости для разных газов:  $\rho_1 = 0$  (вакуум), 0.17 (гелий), 1.29 (воздух), 1.97 (двуокись углерода) кг/м<sup>3</sup>, (штрих-пунктирная, пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно)

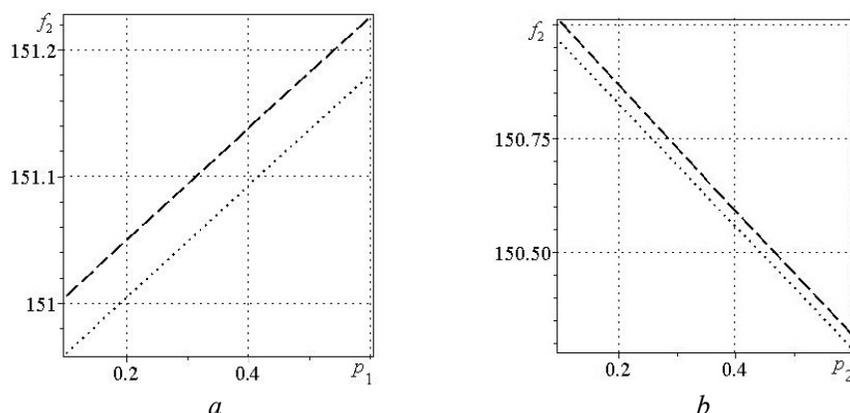


Рис. 4. Зависимость первой частоты изгибных колебаний углеродной нанотрубки  $f_2$  (Гц) от давления для  $R = 0.6$  нм и приведенных выше числовых значений входных параметров:  $a - p_1$  (МПа) при  $p_2 = 0.1$  МПа;  $b - p_2$  (МПа) при  $p_1 = 0.1$  МПа для двуокиси углерода  $\rho_1 = 1.97$  кг/м<sup>3</sup> по формулам для несжимаемой и сжимаемой жидкостей (штриховая, пунктирная линии соответственно)

**Заключение.** Приведенные ниже выводы относятся к изгибной деформации с образованием волн только по окружности однослойной углеродной нанотрубки, находящейся в контакте с жидкостями или газами. Принимается допущение о безотрывном взаимодействии между стенкой трубки и контактирующей средой. Модель несжимаемой жидкости используется только при определении динамических давлений в среде, обусловленных движением нанотрубки. При этом учитывается, что статические давления и плотности связаны изотермическим законом.

Собственные частоты изгибных колебаний нанотрубки в присутствии воды и других жидкостей ( $\omega_n$ ) всегда существенно меньше, чем в вакууме ( $\Omega_n$ ). Это объясняется влиянием присоединенных масс жидкостей с плотностями  $\rho_1$  (внутри трубки) и  $\rho_2$  (вне). Как видно из (3.6), их влияние суммируется. Изменение собственных частот зависит также от соответствующих давлений  $p_1$  и  $p_2$ . Внешний перепад ( $p_2 > p_1$ ) приводит к дальнейшему уменьшению частот. При  $p_2 > p_1$  происходит их увеличение и для какой-то гармоники может быть  $\omega_n \geq \Omega_n$ , когда влияние внутреннего перепада равно или превышает влияние присоединенной массы.

Влияние воздуха, находящегося внутри и вне трубки при атмосферном давлении, отсутствует на низшую частоту колебаний, если ее радиус  $R \leq 3.5$  нм. При тех же условиях для гелия этот радиус равен  $R \leq 60$  нм (для высших частот имеется понижающее влияние). При давлениях более атмосферного эти радиусы уменьшаются.

Эти оценки получены по модели несжимаемой жидкости, когда присоединенная масса не зависит от самих искомых частот колебаний.

Для сжимаемой жидкости это влияние носит более сложный характер, так как присоединенная масса зависит от скорости звука и от самой частоты колебаний. Кроме того, давление и плотность газовой среды не являются независимыми. С ростом давления собственная частота колебаний возрастает. В случае легких газов (водород, гелий) влияние давления может превалорировать над их плотностью.

Малая зависимость частот колебаний трубки от сжимаемости сред объясняется перетеканием их из области одной полуволны к другой. За каждый цикл колебаний около поверхностей стенки в пределах полуволны происходит приток и отток сред, причем в рамках линейных колебаний соответствующие объемы равны между собой. Ввиду сказанного модель несжимаемой жидкости является вполне приемлемой при анализе колебаний рассматриваемой системы.

Важными представляются оценки условий возникновения кавитационного взаимодействия между нанотрубкой и жидкостью, так как это приводит к сильному изменению частот колебаний системы по сравнению с безотрывным взаимодействием. По-видимому, это сложное явление еще не рассматривалось. Оно нуждается в экспериментальном изучении. Более точное описание его возможно методом молекулярной физики и численного моделирования. Здесь даны некоторые оценки этого явления в случае контакта колеблющейся однослойной нанотрубки, находящейся в воде.

Полученные результаты имеют значение и для цилиндрических оболочек макроразмеров. Влияние контактирующей среды является значительным на частоту колебаний в случае тонких оболочек из материала с низким модулем упругости.

*Работа проведена в порядке выполнения Государственного задания (FMRS-2023-0015).*

### Литература

1. Bleich H.H., Baron M.L. Free and Forced vibration of an infinitely long cylindrical shell in an infinite acoustic medium // *J. Appl. Mech. Transactions of ASME*. 1954. V. 21. № 2. P. 167–177.

2. Гонткевич В.С. Собственные колебания оболочек в жидкости. Киев: Наукова думка, 1964. 102 с.

3. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.

4. Попов А.Л., Чернышев Г.Н. Механика звукоизлучения пластин и оболочек. М.: Физматлит, 1994. 208 с.

5. Дяченко И.А., Миронов А.А. Аналитические и численные исследования свободных колебаний цилиндрических оболочек с акустической средой // *Проблемы прочности и пластичности*. 2021. Т. 83. № 1. С. 35–48. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2021-83-1-35-48>

6. Rawat A., Matsagar V., Nagpal A. Finite element analysis of thin circular cylindrical shells. *Proceedings of the Indian National Science Academy*. 2016. V. 82. № 2. P. 349–355. <https://doi.org/10.16943/ptinsa/2016/48426>.

7. Farshidianfar A., Oliazadeh P. Free vibration analysis of circular cylindrical shells: comparison of different shell theories. *International Journal of Mechanics and Applications*. 2012. V. 2(5). P. 74–80. <https://doi.org/10.5923/j.mechanics.20120205.04>

8. Rayleigh Strutt J.W. *The Theory of Sound*. Vol. 1. London: Macmillan, 1894. 500 p. = Стретт Дж.В. Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с.

9. Хакимов А.Г. Обзор исследований по вычислительной диагностике локальных дефектов элементов конструкций // *Многофазные системы*. 2019. Т. 14. № 1. С. 1–9. <https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.001>

10. Burg T.P., Godin M., Knudsen S.M., Shen W., Carlson G., Foster J.S., Babcock K., Manalis S.R. Weighing of biomolecules, single cells and single nanoparticles in fluid // *Nature*. 2007. № 446. P. 1066–1069. <https://doi.org/10.1038/nature05741>

11. Husale S., Persson H.H.J., Sahin O. DNA nanomechanics allows direct digital detection of complementary DNA and microRNA targets // *Nature*. 2009. № 462. P. 1075–1078. <https://doi.org/10.1038/nature08626>

12. Ilgamov M.A. Shamil U. Galiev (2020) Simulation of extreme waves in technology and nature. CRC Press (2020) 822 p. V. 1. The evolution of extreme

waves and resonances // *Izvestija Ufinskogo nauchnogo centra RAN*. 2021. № 1. С. 118–121. <https://doi.org/10.31040/2222-8349-2021-0-1-118-121>

13. Sirenko Y.M., Stroschio M.A., Kim K.W. Elastic vibrations of microtubules in a fluid // *Phys. Rev.* 1996. V. 53. № 1. P. 1003–1010.

14. Дмитриев С.В., Сунагатова И.Р., Ильгамов М.А., Павлов И.С. Собственные частоты радиальных колебаний углеродных нанотрубок // *ЖТФ*. 2021. Т. 91. Вып. 11. С. 1732–1737. <https://doi.org/10.21883/JTF.2021.11.51536.127-21>

15. Дмитриев С.В., Ильгамов М.А. Радиальная реакция углеродной нанотрубки на динамическое давление // *ДАН. Физика. Технические науки*. Т. 501. № 1. 2021. С. 8–13. <https://doi.org/10.31857/S2686740021060080>

### References

1. Bleich H. H., Baron M. L. Free and Forced vibration of an infinitely long cylindrical shell in an infinite acoustic medium // *J. Appl. Mech. Transactions of ASME*, 1954, vol. 21, no. 2, pp. 167–177.

2. Gontkevich V.S. *Natural Oscillations of Shells in a Liquid*. Kiev: Naukova dumka, 1964, 102 p. (in Russian).

3. Il'gamov M.A. *Vibrations of Elastic Shells Containing Liquid and Gas*. Moscow, Nauka, 1969, 180 p. (in Russian).

4. Popov A. J., Chernyshev G. N. *Mechanics of Sound Emission of Plates and Shells*. Moscow, Fizmatlit, 1994, 208 p. (in Russian).

5. Djachenko I.A., Mironov A.A. *Analiticheskie i chislennye issledovaniya svobodnyh kolebanij cilindricheskikh obolochek s akusticheskoy sredoj* // *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2021, vol. 83, no. 1, pp. 35–48. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2021-83-1-35-48>

6. Rawat A., Matsagar V., Nagpal A. Finite element analysis of thin circular cylindrical shells. *Proceedings of the Indian National Science Academy*, 2016, vol. 82, no. 2, pp. 349–355. <https://doi.org/10.16943/ptinsa/2016/48426>.

7. Farshidianfar A., Oliazadeh P. Free vibration analysis of circular cylindrical shells: comparison of different shell theories. *International Journal of Mechanics and Applications*, 2012, vol. 2(5), pp. 74–80. <https://doi.org/10.5923/j.mechanics.20120205.04>

8. Rayleigh Strutt J.W. *The Theory of Sound*. 1894. vol. 1. London: Macmillan, 500 p.

9. Khakimov A.G. Review of studies on the computational diagnosis of local defects of structural elements. *Multiphase Systems*. 14 (2019) 1, pp. 1–9. (in Russian). <https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.001>

10. Burg T.P., Godin M., Knudsen S.M., Shen W., Carlson G., Foster J.S., Babcock K., Manalis S.R. Weighing of biomolecules, single cells and single nanoparticles in fluid // *Nature*, 2007, no. 446, pp. 1066–1069. <https://doi.org/10.1038/nature05741>.

11. Husale S., Persson H.H.J., Sahin O. DNA nanomechanics allows direct digital detection of complementary DNA and microRNA targets // *Nature*, 2009, no. 462, pp. 1075–1078. <https://doi.org/10.1038/nature08626>.

12. Ilgamov M.A. Shamil U. Galiev (2020) Simulation of extreme waves in technology and nature. CRC Press (2020) 822 p., vol. 1. The evolution of extreme waves and resonances // *Izvestija Ufinskogo nauchnogo centra RAN*, 2021, no. 1, pp. 118–121. <https://doi.org/10.31040/2222-8349-2021-0-1-118-121>

13. Sirenko Y.M., Stroschio M.A., Kim K.W. Elastic vibrations of microtubules in a fluid // *Phys. Rev.*, 1996, vol. 53, no. 1, pp. 1003–1010.

14. Dmitriev S.V., Sunagatova I.R., Ilgamov M.A. et al. Natural frequencies of bending vibrations of carbon nanotubes // *Tech. Phys.*, 2022, vol. 67, pp. 7–13. <https://doi.org/10.1134/S1063784222010042>

15. Dmitriev S.V. and Ilgamov M.A. The radial response of a carbon nanotube to dynamic pressure // *Dokl. Phys.*, 2021, vol. 66, pp. 336–340. <https://doi.org/10.1134/S102833582112003X>

---

## INFLUENCE OF THE ENVIRONMENT ON THE NATURAL FREQUENCIES OF CARBON NANOTUBE OSCILLATION

© M.A. Ilgamov<sup>1</sup>, A.G. Khakimov<sup>1</sup>, S.V. Dmitriev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mavlyutov Institute of Mechanics – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences,  
69, prospect Oktyabrya, 450054, Ufa, Russian Federation

<sup>2</sup>Institute of Molecule and Crystal Physics – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences,  
151, prospect Oktyabrya, 450075, Ufa, Russian Federation

The bending vibrations of a single-walled carbon nanotube are determined using the theory of elastic vibrations of a long cylindrical shell, with the condition of inextensibility of the middle surface being satisfied with high accuracy. The shell surfaces are in contact with media of different densities and pressures inside and outside the shell. The medium can be compressible during surface deformation or incompressible. For gases, an isothermal law is assumed, and for the incompressible fluid model, a constant density is assumed. The specified static pressures do not change during tube deformation. The equations of motion for ideal incompressible and compressible fluids with different densities and pressures inside and outside the tube are used. An assumption of a separation-free interaction between the tube wall and the contacting medium is made. The transverse distributed force is determined taking into account the change in elementary lengths on the inner and outer surfaces of the curved shell in accordance with the Kirchhoff–Love hypothesis on the normal to the curved midsurface. The conditions of equality of the velocities of an ideal fluid along the normal and the tube wall are used. The spectrum of natural frequencies of radial bending vibrations of a long closed shell with the parameters of a single-wall carbon nanotube and the influence of the media inside and outside it on them are investigated. The dependence of the natural frequencies on the ratios of the densities and pressures of the media, as well as the material, wall thickness, and radius of the tube, is studied. The natural frequencies of bending vibrations of a nanotube in the presence of water and other liquids are always significantly lower than in a vacuum. This is explained by the influence of the added masses of liquids inside and outside the tube. Estimates of the conditions for the occurrence of cavitation interaction between the nanotube and the liquid are important, since this leads to a significant change in the oscillation frequencies of the system compared to a separation-free interaction. Apparently, this complex phenomenon has not yet been considered. It requires experimental study. A more accurate description is possible using molecular physics and numerical modeling. Here, some estimates of this phenomenon are given for the case of a vibrating single-walled nanotube in contact with water. The results obtained are also relevant for macroscopic cylindrical shells. The influence of the contacting medium on the oscillation frequency is significant for thin shells made of a material with a low elastic modulus.

Keywords: carbon nanotube, cylindrical shell, gas, pressure, density, added mass.