

УДК 524.88

DOI: 10.31040/2222-8349-2026-0-1-42-45

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ
В АСИМПТОТИЧЕСКИ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

© Р.Р. Волоцкова, П.Н. Михайлов, Д.-Л.З. Гесс

Представлены результаты численного моделирования движения заряженной частицы в гравитационном поле черной дыры Шварцшильда, погруженной в асимптотически однородное магнитное поле. Исследование направлено на качественное объяснение механизмов коллимации релятивистских джетов и стабилизации аккреционных потоков. Уравнения движения в рамках общей теории относительности проинтегрированы с использованием метода Рунге–Кутты 4-го порядка. Визуализированы траектории частиц, демонстрирующие формирование структур, морфологически схожих с джетами и аккреционными дисками. Рассматриваемая в работе математическая модель представляет собой систему из восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для ее решения авторами была разработана программа на языке Python, использующая метод Рунге–Кутты 4-го порядка с постоянным шагом по собственному времени. В работе показано, что однородное магнитное поле эффективно коллимирует вещество вдоль силовых линий, создавая структуры, морфологически схожие с релятивистскими джетами. Оно также стабилизирует аккреционный поток, создавая протяженные квазипериодические орбиты. Дипольное поле, более реалистичное для компактных объектов, порождает сложные траектории с захватом частиц в магнитные ловушки, что качественно объясняет процессы нагрева и ускорения частиц в аккреционных дисках. Сила магнитного поля напрямую влияет на характер движения: чем оно сильнее, тем более стабильны орбиты и тем эффективнее работает механизм «выброса» вещества. Полученные результаты находятся в качественном согласии с современными астрофизическими моделями и подчеркивают неразрывную связь гравитации и магнетизма в экстремальных условиях.

Ключевые слова: черная дыра Шварцшильда, общая теория относительности, магнитное поле, заряженные частицы, релятивистские джеты, аккреция, численное моделирование.

Введение. Сверхмассивные черные дыры в активных ядрах галактик и черные дыры звездной массы являются мощнейшими источниками энергии во Вселенной. Ключевыми наблюдаемыми объектами являются аккреционные диски – разогретые до высоких температур вихревые потоки вещества, и релятивистские джеты – коллимированные струи плазмы, выбрасываемые вдоль оси вращения со скоростями, близкими к скорости света [1]. Наблюдения Телескопа Горизонта Событий (Event Horizon Telescope) за объектами M87 и SgrA наглядно продемонстрировали морфологию этих структур в непосредственной близости от горизонта событий [2]. Физические механизмы, ответственные за ускорение и, что особенно важно,

за узкую коллимацию джетов на гигантских расстояниях, до сих пор остаются предметом изучения. Одна из наиболее признанных теорий – модель Бландфорда–Знаека [3] – предполагает, что энергия вращения черной дыры (эффект Лензе–Тирринга) и аккреционного диска может извлекаться и преобразовываться в кинетическую энергию струи посредством мощных магнитных полей, «вмороженных» в аккрецирующую плазму. Чтобы извлечь энергию и угловой момент из черной дыры, электромагнитное поле вокруг дыры должно быть изменено магнитосферными токами. Поскольку эргосфера заставляет магнитосферу внутри нее вращаться, выходящий поток момента импульса приводит к выбросу энергии из черной дыры [3]. Таким

ВОЛОЦКОВА Резеда Радиковна, Российский биотехнологический университет,
e-mail: Fmfizika13@yandex.ru

МИХАЙЛОВ Павел Никонович – д.ф.-м.н., Уфимский университет науки и технологий (Стерлитамакский филиал), e-mail: mihaylovpn@mail.ru

ГЕСС Далия-Лира Зиевна – к.ф.-м.н., Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, e-mail: dahlia.hess@gmail.com

образом, исследование взаимодействия гравитационного и электромагнитного полей в релятивистской области является фундаментальной задачей современной астрофизики.

Анализ невращающейся черной дыры.

Большинство полных магнитодинамических моделей чрезвычайно сложны для анализа. Данная работа предлагает достаточно простой подход к пониманию этой проблемы – изучение динамики отдельных пробных заряженных частиц. Такой подход позволяет абстрагироваться от сложных коллективных процессов в плазме и выявить роль чисто геометрических и силовых факторов. Новизна работы заключается в комплексном численном моделировании и сравнительном анализе траекторий частиц для широкого спектра начальных условий и параметров магнитного поля с целью продемонстрировать, как однородное магнитное поле может естественным образом приводить к коллимации траекторий вдоль оси вращения системы.

В рамках общей теории относительности невращающаяся черная дыра описывается решением Шварцшильда, которое характеризуется только двумя параметрами: массой и электрическим зарядом. В отличие от более общего решения Керра для вращающихся черных дыр, шварцшильдовская черная дыра обладает сферической симметрией и не увлекает пространство-время вокруг себя в движение (эффект Лензе–Тирринга). Ключевыми особенностями такой черной дыры являются горизонт событий, расположенный на радиусе Шварцшильда $r_s = 2GM/c^2$, и центральная сингулярность, где кривизна пространства-времени становится бесконечной.

Рассмотрим теоретическую модель и уравнения движения невращающейся черной дыры (метрика Шварцшильда). В стандартных сферических координатах (t, r, θ, φ) она имеет вид [4]:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 \frac{d}{\theta^2} + \frac{r^2}{\sin^2\theta} \frac{d}{\varphi^2}, \quad (1)$$

где $f(r) = 1 - 2Mr$, и $M = 1$ – масса черной дыры. Здесь используется система единиц, в которой $G = c = 1$, поэтому масса имеет размерность длины.

Уравнение движения для частицы с пренебрежительно малой массой m и зарядом q в искривленном пространстве-времени с элек-

тромагнитным полем описывается обобщенным уравнением геодезической [5]:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = \frac{q}{m} F_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (2)$$

где τ – собственное время частицы для случая радиального падения ($L = 0$), $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ – символы Кристоффеля, F_ν^μ – тензор электромагнитного поля.

Уравнение радиального движения частицы:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{eff}(r) = \varepsilon, \quad (3)$$

где ε – константа, аналогичная полной механической энергии [6], а эффективный потенциал для радиального движения массивной частицы в поле Шварцшильда задается выражением:

$$V_{eff}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}. \quad (4)$$

Из уравнения (4) для радиального падения частицы ($L=0$) получаем:

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{2\varepsilon - V_{eff}(r)}. \quad (5)$$

Проинтегрировав это уравнение, можно убедиться, что собственное время τ , за которое частица достигнет горизонта $r = 2M$, конечно.

Для описания асимптотически однородного магнитного поля с напряженностью $B=0.05$, направленного вдоль оси z , используется 4-потенциал A_ϕ .

Однородное магнитное поле на бесконечности:

$$A_\phi = \frac{1}{2} Br^2 \sin^2\theta. \quad (5)$$

Дипольное магнитное поле:

$$A_\phi = \frac{\mu \sin^2\theta}{r}. \quad (6)$$

В силу симметрии системы сохраняются энергия частицы и обобщенный момент импульса Lz . Система уравнений (1) представляет собой систему из восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для ее решения была разработана программа на языке Python, использующая метод Рунге–Кутты 4-го порядка с постоянным шагом по собственному времени dt .

Для получения уравнений движения удобно использовать принцип стационарного действия, где действие S пропорционально интервалу:

$$S = -m \int ds,$$

где m – масса покоя частицы.

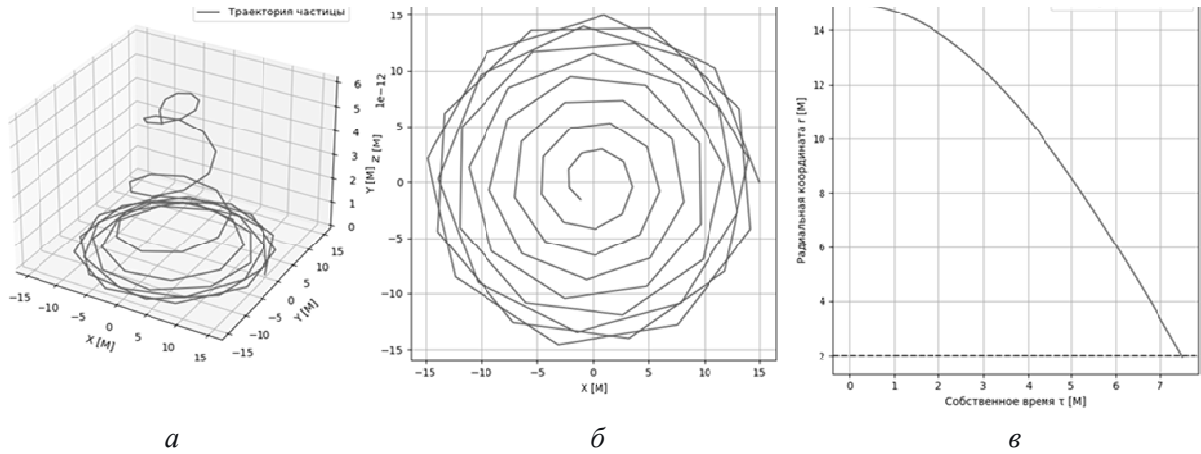


Рис. 1: *a* – 3D траектория частицы, захваченной магнитным полем и гравитацией ЧД; *б* – проекция, демонстрирующая дрейф и осцилляции; *в* – радиальное движение

Расчет прекращается при пересечении частицей горизонта событий ($r \leq 2M$) или при ее удалении на значительное расстояние $r > r_{max}$. Программой строятся 3D траектории, их проекции на координатные плоскости и графики для динамических параметров.

Исследование геодезической при параметрах $M = 1$, $q_m = 0.1$, $B = 0.05$.

Задаются следующие значения: $M = 1$, $q_m = 0.1$, $B = 0.05$, а также начальные координаты и компоненты 4-скорости частицы. Начальные условия: частица движется экваториально с тангенциальной скоростью $r_0 = 15M$.

Как видно из рис. 1, однородное магнитное поле стабилизирует движение частиц, не позволяя им сразу упасть на черную дыру. Частицы совершают сложные колебательные и дрейфовые движения, формируя структуры, напоминающие внутренние области аккреционного диска. При определенных начальных условиях (например, при большой тангенциальной скорости) частицы могут быть выброшены вдоль силовых линий магнитного поля, формируя прообраз джета. График показывает, что с ростом B амплитуда и период радиальных осцилляций уменьшаются. Слишком слабое поле ($B=0.05$) не может эффективно удерживать частицу от падения. На рис. 1, *a* траектория представляет собой трехмерную спираль, демонстрирующую постепенное падение частицы к центру черной дыры. Причиной спиралевидного движения может быть потеря орбитальной энергии. Частица, вероятно, теряет энергию (например, за счет излучения гравитационных волн или взаимодействия с аккреционным диском), что заставляет ее постепенно падать по направлению к центру.

Проекция на плоскость XY на рис. 1, *б* представляет собой орбиту, демонстрирующую выраженную прецессию периастра – смещение точки

наибольшего сближения с каждым оборотом. В отличие от ньютоновской гравитации, орбиты в ОТО не замкнуты, что проявляется в виде розеточной структуры. Форма траектории определяется релятивистским эффективным потенциалом, имеющим экстремумы при $r = 6M$ (фотонная сфера) и $r = 3M$ (последняя стабильная орбита).

Рис. 1, *в* изображает динамику падения. График показывает изменение радиальной координаты относительно собственного времени падающей частицы. При $r = 2M$ частица пересекает горизонт событий – точка невозврата, после которой скорость убегания превышает скорость света. После горизонта событий частица необратимо движется к сингулярности ($r = 0$). Частица достигает сингулярности за конечное собственное время. Для внешнего наблюдателя падение длится бесконечно долго из-за гравитационного замедления времени.

Заключение. Проведенное численное моделирование подтвердило, что в больших масштабах магнитное поле является критически важным фактором, определяющим динамику плазмы в окрестностях черной дыры. Показано, что однородное магнитное поле эффективно коллимирует вещество вдоль силовых линий, создавая структуры, морфологически схожие с релятивистскими джетами. Оно также стабилизирует аккреционный поток, создавая протяженные квазипериодические орбиты. Дипольное поле, более реалистичное для компактных объектов, порождает сложные траектории с захватом частиц в магнитные ловушки, что качественно объясняет процессы нагрева и ускорения частиц в аккреционных дисках. Сила магнитного поля напрямую влияет на характер движения: чем оно сильнее, тем более стабильны орбиты и тем эффективнее работает меха-

низм «выброса» вещества. Разработанная программа является эффективным инструментом для визуализации и первичного анализа сложной релятивистской динамики и может быть расширена для моделирования вращающихся черных дыр (метрика Керра). Полученные результаты находятся в качественном согласии с современными астрофизическими моделями и подчеркивают неразрывную связь гравитации и магнетизма в экстремальных условиях.

Литература

1. Baker J., Campanelli M. Making use of geometrical invariants in black hole collisions // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 62. P. 127501.
2. Misner C., Thorne K. & Wheeler J.A. *Gravitation*. San Francisco: W.H. Freeman.
3. Blandford R.D., Znajek R.L. Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. V. 179. P. 433–456.
4. Nandi K.K., Izmailov R.N., Karimov R.K. et al. Testing generalized spacetimes for black holes using the Hod function representation of the hoop conjecture // *The European Physical Journal C – Particles and Fields*. 2022. V. 82. № 3.
5. Nandi K.K., Izmailov R.N., Garipova G.M. et al. On the hoop conjecture in Einstein gravity coupled to nonlinear electrodynamics // *Physics Letters. Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*. 2020. V. 809. P. 135734.

6. Гесс Д.-Л.З., Ганиева Д.И. Сильное гравитационное линзирование для случая регулярных заряженных черных дыр без горизонта // *Известия Уфимского научного центра РАН*. 2023. № 1. С. 86–91.

References

1. Baker J., Campanelli M. Making use of geometrical invariants in black hole collisions // *Phys. Rev. D.* 2000, vol. 62. p. 127501.
2. Misner C., Thorne K. & Wheeler J.A. *Gravitation*. San Francisco: W.H. Freeman.
3. Blandford R.D., Znajek R.L. Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 179, pp. 433–456.
4. Nandi K.K., Izmailov R.N., Karimov R.K. et al. Testing generalized spacetimes for black holes using the Hod function representation of the hoop conjecture // *The European Physical Journal C – Particles and Fields*, 2022, vol. 82, no. 3.
5. Nandi K.K., Izmailov R.N., Garipova G.M. et al. On the hoop conjecture in Einstein gravity coupled to nonlinear electrodynamics // *Physics Letters. Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, 2020, vol. 809, p. 135734.
6. Gess D.-L.Z., Ganieva D.I. Sil'noe gravitacionnoe linzirovaniye dlya sluchaya regul'yarnykh zaryazhennykh chernykh dyr bez gorizonta // *Izvestiya Ufimskogo nauchnogo centra RAN*, 2023, no. 1, pp. 86–91.

SIMULATION OF THE MOTION OF A CHARGED PARTICLE IN AN ASYMPTOTICALLY HOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD

© R.R. Volotskova¹, P.N. Mikhailov², D.-L.Z. Gess³

¹Russian Biotechnological University,
3, prospekt Nauki, 142290, Moskovskaya oblast', Pushchino, Russian Federation

²Ufa University of Science and Technology,
32, ulitsa Zaki Validi, 450076, Ufa, Russian Federation

³Akmullah Bashkir State Pedagogical University,
3a, ulitsa Oktybrskoy revolyutsii, 450008, Ufa, Russian Federation

The paper presents the results of numerical simulation of the motion of charged particles in the gravitational field of a Schwarzschild black hole immersed in an asymptotically homogeneous magnetic field. The study is aimed at a qualitative explanation of the mechanisms of collimation of relativistic jets and stabilization of accretion fluxes under astrophysical conditions. The Runge-Kutta method of the 4th order integrates the equations of motion within the framework of the general theory of relativity. Particle trajectories are visualized, demonstrating the formation of structures morphologically similar to jets and accretion disks. The mathematical model considered in the paper is a system of eight first-order ordinary differential equations. To solve it, the authors developed a Python program using the fourth-order Runge-Kutta method with a constant proper time step. The paper demonstrates that a uniform magnetic field effectively collimates matter along magnetic field lines, creating structures morphologically similar to relativistic jets. It also stabilizes the accretion flow, creating extended quasi-periodic orbits. A dipole field, more realistic for compact objects, generates complex trajectories with particle capture in magnetic traps, which qualitatively explains the processes of heating and acceleration of particles in accretion disks. The strength of the magnetic field directly influences the nature of the motion: the stronger the field, the more stable the orbits and the more efficient the mechanism for "ejecting" matter. The obtained results are in qualitative agreement with modern astrophysical models and highlight the inextricable link between gravity and magnetism in extreme conditions.

Keywords: Schwarzschild black hole, general theory of relativity, magnetic field, charged particles, relativistic jets, accretion, numerical simulation.