

УДК 539.3

DOI: 10.31040/2222-8349-2025-0-3-5-9

НЕУСТОЙЧИВЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДА С ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

© Р.Ш. Гимадиев

Исследовано динамическое поведение провода малой длины по двум математическим моделям. Первая модель учитывает в поперечных сечениях только продольные силы, а вторая – продольные и перерезывающие силы, изгибающие моменты. В каждой из моделей нелинейные дифференциальные уравнения движения провода решаются численно методом конечных разностей. Из числовых расчетов следует, что по обоим моделям движение провода начинается из начального вытянутого состояния покоя под действием сил гравитации. Показано, что в определенный момент времени амплитуда прогиба средней точки пролета провода достигает наибольшего значения. Установлено, что при принятых параметрах вторая модель расчетов дает заниженное значение указанной амплитуды. Кроме того, показано, что в последнем случае в большом временном интервале имеют место неустойчивые изгибные колебания провода с частотой около 16 Гц.

Ключевые слова: провод, деформирование, колебания, неустойчивость, численный эксперимент, изгибная жесткость, провис.

Введение. При расчетах динамического напряженно-деформированного состояния (НДС) проводов высоковольтных линий электропередач, имеющих по длине постоянные упругие и геометрические характеристики поперечных сечений, в основном используются следующие две математические модели. Первая – модель абсолютно гибкого провода, в поперечных сечениях которого действуют только силы натяжения. Модель применяется для расчета проводов больших длин. Вторая модель расчета предназначена для расчета проводов средних и малых длин. В поперечных сечениях данной модели учитываются продольные и перерезывающие силы, крутящие и изгибающие моменты.

Вопросы взаимодействия неустойчивостей в гидроупругой системе рассматривались в [1]. В [2] изучено пространственное динамическое поведение провода высоковольтной линии электропередачи (ЛЭП) при действии гравитационных и аэродинамических сил. Здесь в основе исследования лежит модель абсолютно гибкого провода. Показано, что порывы ветра в горизонтальной плоскости обуславливают низкочастотные колебания провода в вертикальной плоскости. При этом амплитуды колебаний достигают больших величин. Данное явление принято называть «пляской проводов» [3].

Авторами [4] исследованы положения динамического равновесия изогнутого трубопровода с вибрирующими опорами. Установлено, что изгибная жесткость трубопровода, давление транспортируемой в нем жидкости, амплитуда и частота вибраций опор в значительной мере влияют на положения точек динамического равновесия. Влияние изгибной жесткости на НДС проводов ЛЭП больших длин (порядка 160 м) рассматривалось также в [5, 6]. Показано, что при таких длинах изгибная жесткость не влияет на НДС проводов ЛЭП. Ряд задач гидроупругости конструкций при отрывном обтекании формулировались и решались в [7]. Функциональные и эксплуатационные вопросы проводов ЛЭП рассмотрены в работах [11–13].

Динамические расчеты НДС проводов постоянного поперечного сечения ЛЭП средних и малых длин представляют не только теоретический, но и практический интерес. Максимальные суммарные нормальные напряжения в поперечных сечениях от действия продольных сил и изгибающих моментов во многом зависят от длины провода. Очевидно, что при прочих равных условиях с увеличением длины провода будет происходить увеличение вклада напряжений от действия продольных сил и уменьшение вклада напряжений от действия изгиба-

ющих моментов. При уменьшении же длины провода все происходит в обратном порядке. Поэтому цель настоящей работы состоит в сравнительном анализе результатов динамического поведения провода постоянного поперечного сечения, нагруженного гравитационными и аэродинамическими силами с учетом жесткости провода на изгиб.

Постановка задачи. Рассматриваются колебания двухопорного провода ЛЭП постоянно поперечного сечения. Расчетная схема провода приведена в [2]. Длина провода L , его условный диаметр d , плотность материала ρ_0 . Провод окружен несжимаемой сплошной воздушной средой. В начальном положении провод, изогнутый собственным весом и силами Архимеда, находится в состоянии покоя. Предполагается, что провод из этого состояния выводится из-за начала действия ветровой нагрузки. На расчетной схеме провода выделен также его элемент длины ds и массы $dm = \rho_0 ds$. К выделенному элементу приложены: gdm – сила веса, $dA = \rho \pi d^2/4$ – погонная выталкивающая сила Архимеда, F_τ и F_n – погонные касательная и нормальная составляющие ветровой нагрузки. Здесь составляющие аэродинамических сил имеют вид [7]

$$F_\tau = \frac{\rho U^2}{2} d c_\tau \cos^2 \alpha, \quad (1)$$

$$F_n = \frac{\rho U^2}{2} d (c_n \sin^2 \alpha + c_\tau \sin \alpha),$$

где U – скорость невозмущенного потока; ρ – плотность среды; α – угол атаки элемента провода; $c_n = 1.8446$, $c_\tau = 0.0554$ – аэродинамические коэффициенты обтекания.

Деформация элемента характеризуется степенью удлинения $\lambda = ds/ds_0 = 1 + e$, где ds_0 и ds – длины упругого элемента провода до и после деформации, e – относительное удлинение.

Уравнение движения упругого провода ЛЭП с учетом изгибной жесткости запишется [2]

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v_k}{\partial t} + \rho_0 \left(EJ_z \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^4} + g \right) (k-1) = \\ = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{T}{1+e} \frac{\partial x_k}{\partial s} \right) + \\ + (-1)^k F_n \frac{\partial x_{3-k}}{\partial s} + F_\tau \frac{\partial x_k}{\partial s}, \end{aligned} \quad (2)$$

где v_k – проекции скорости $\mathbf{V}$ элемента провода на оси координат x_k ($k = 1, 2$); E , $J_z = \pi d^4/64$ –

модуль упругости материала и осевой момент инерции поперечного сечения провода; x_2^0 и x_2 – начальная и текущая координаты точек прогиба (провиса) провода; S – лагранжева координата элемента; составляющие аэродинамических сил F_n , F_τ определяются формулами (1); g – гравитационное ускорение.

Поперечные колебания гибких систем влияют на нормальные составляющие погонных усилий F_n : при движении элемента упругого провода против потока эта составляющая увеличивается, а при движении по потоку – уменьшается. С учетом этого пересчет проводится по формуле

$$F_n(s, t) = F_n^0(s, t) \left[1 - \mu \frac{V_n}{U_\infty} \right]^2 \text{sign} \left[1 - \mu \frac{V_n}{U_\infty} \right], \quad (3)$$

где V_n – нормальная составляющая скорости элемента провода; μ – коэффициент аэродинамического демпфирования.

Кинематические связи следующие:

$$\frac{\partial x_k}{\partial \tau} = v_k. \quad (4)$$

Геометрические соотношения

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial s} \right)^2 = \lambda^2, \lambda = 1 + e. \quad (5)$$

Уравнения (2)–(5) дополняются физической зависимостью Кельвина – Фойгта

$$T = E \cdot e + \eta \dot{e}, \quad (6)$$

где $\dot{e}$ – скорость линейной деформации; η – коэффициент внутреннего трения в материале провода; коэффициент относительного удлинения e при растяжении имеет положительное значение, а при сжатии его значение – отрицательное.

Результаты решения задачи на шаге интегрирования служат в качестве начальных и граничных условий для следующего шага интегрирования.

При решении уравнений (2) для аппроксимации производных используются центральные разности на сдвинутой на полшага сетке и явная конечно-разностная схема для скорости движения элемента. По результатам расчета задачи динамики движения провода ЛЭП и ленточных парашютов на сверхзвуке [9] по методу конечных разностей за фронтом волн (достаточно в узком диапазоне) сеточные функции испытывают высокочастотные колебания (осцилляции), не позволяющие установить истинные значения

искомых параметров. Это особенно важно в быстро протекающих процессах задач динамики. Поэтому в расчетах применяется метод сглаживания фронта волн путем непосредственной корректировки скоростей точек расчетной сетки в соответствии с формулой

$$\bar{v}_k = v_k + \beta \frac{\partial^2 v_k}{\partial s^2}. \quad (7)$$

Эта формула следует из работы Х.А. Рахматулина, Ю.А. Демьянова [8] и адаптирована на задачах динамики парашютных оболочек [9], где β – коэффициент искусственной вязкости. Такой подход можно интерпретировать также и как введение в систему уравнений диссипативных членов (так называемой псевдовязкости, или искусственной вязкости). Это особенно актуально в задачах ударного взаимодействия.

Координаты узловых точек разностной сетки или кинематические соотношения в разностном представлении записываются в виде

$$x_{k,i}^{m+1} = x_{k,i}^m + \Delta t \bar{v}_{k,i}^{m+1/2}. \quad (8)$$

Шаг интегрирования $h = L/n$ – выбирается из условия устойчивости счета по критерию Куранта $\Delta t \leq \Delta s \sqrt{\rho_l / E}$, где $\Delta s = h$; $n = 40$ – число ячеек пролета в численном алгоритме.

Начальные условия задачи:

$$x_1(i) = h \cdot (i-1), \quad v_1(i) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n+1;$$

$$x_2(i) = 0, \quad v_2(i) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Граничные условия задачи:

$$x_1(1) = 0, \quad v_1(1) = 0;$$

$$x_1(n+1) = L, \quad v_1(n+1) = 0;$$

$$x_2(1) = 0, \quad v_2(1) = 0;$$

$$x_2(n+1) = 0, \quad v_2(n+1) = 0.$$

Результаты решения задачи на шаге m интегрирования служат в качестве начальных и граничных условий для следующего $m+1$ шага интегрирования.

Равновесное состояние провода следует как предельное решение динамической задачи. Выбор коэффициента корректировки скоростей и коэффициента устойчивости численного решения осуществляется путем проведения численных экспериментов на модельных задачах [9]. Далее проводится сравнительный анализ результатов расчетов провода длиной $L = 1.6$ м, полученных согласно указанным выше математическим моделям.

Сравнительный анализ результатов вычислений динамического поведения провода по двум математическим моделям. Значения основных параметров провода были приняты по справочнику [9]. Плотность и модуль упругости материала провода: $\rho_0 = 0.528$ кг/м, $E = 10.6$ МПа. Диаметр поперечного сечения провода: $d = 0.0147$ м. Из результатов численного решения задачи динамического деформирования провода без учета его изгибной жесткости можно сделать следующие предварительные выводы. Наибольшая сила натяжения $T = 590$ Н реализовалась в момент времени $t = 0.051$ с; максимальный прогиб при этом составил $f = 0.00750$ м. По истечении времени $t = 0.56$ с система выходит на стационарное состояние с силой натяжения $T = 314$ Н и прогибом $f = 0.00531$ м. При этом коэффициент динамичности равен 1.88. На рис. 1 *a, b, c, d* приведены формы колебаний провода в различные моменты безразмерного времени. Здесь $\tau = Ut/L$ – безразмерное время, $U = 20$ м/с – характерная скорость; начало системы координат Ox_1x_2 совмещено со средней точкой пролета провода. Отметим также хорошее согласие результатов вычислений численного и аналитического моделирования [2].

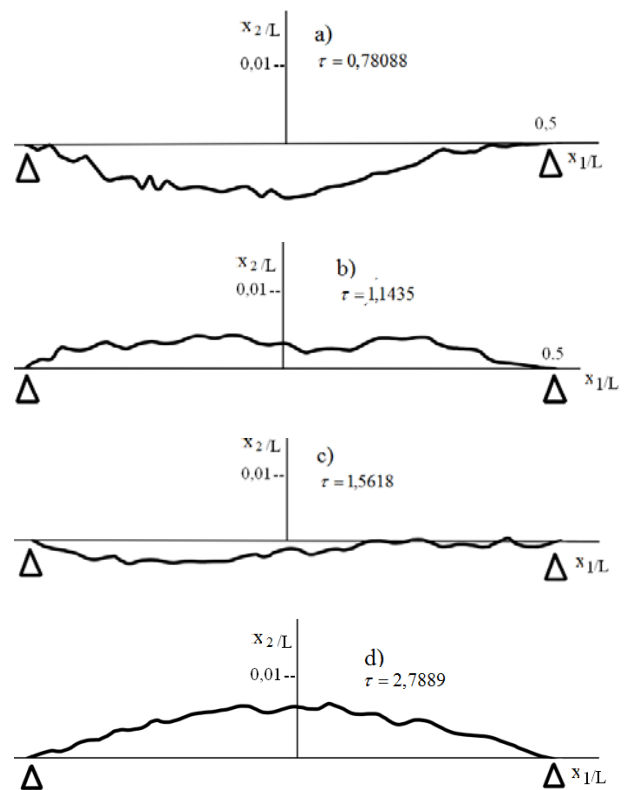


Рис. 1. Формы колебаний гибкого провода в различные моменты времени

На рис. 2 после 30 циклов представлена форма колебаний упругого провода по модели, учитывающей в поперечных сечениях изгибающие моменты, продольные и перерезывающие силы. Подчеркнем, что длительность поперечных колебаний провода по второй модели становится значительно больше, чем по первой модели.

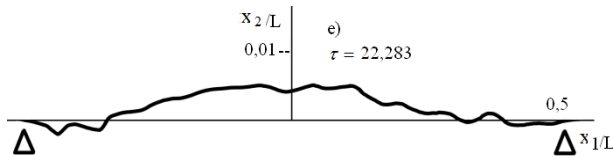


Рис. 2. Форма колебаний провода при $\tau = 22.283$ по модели, учитывающей в поперечных сечениях изгибающие моменты и продольные силы

Из сравнения форм колебаний провода, приведенных на рис. 1, d и 2, можно видеть, что максимальные значения амплитуд провисов средних точек пролета провода по двум математическим моделям расчета отличаются, и показано, что в этом случае имеют место продолжительные неустойчивые колебания провода. Эти колебания происходят с частотой 16 Гц и продолжаются около 30 циклов.

Заключение. Изучение динамического НДС провода ЛЭП при действии на него гравитационных, переменных ветровых, вибрационных или других сил имеет несомненный практический интерес. В зависимости от приложенных сил, условий закрепления на опорах, механических характеристик материала, расстояния между опорами и размеров поперечного сечения провод может совершать колебательные движения как в одной плоскости, так и в пространстве. Поэтому при решении задач о движении провода в пространстве должны учитываться все возникающие в его поперечных сечениях внутренние силы: продольные и перерезывающие силы, крутящие и изгибающие моменты.

Настоящая работа посвящена исследованию динамического поведения провода ЛЭП небольшой длины при действии на него сил гравитации. Сравниваются результаты вычислений по двум математическим моделям. Согласно первой модели расчета в поперечных сечениях провода учитываются только продольные силы. Вторая модель расчета предполагает учет в поперечных сечениях провода как продольных сил, так и изгибающих моментов. Реализация цели исследования проведена чис-

ленно методом конечных разностей. Построены формы колебаний провода в различные моменты времени. Показано, что по модели, учитывающей в поперечных сечениях провода только продольные силы, его колебательные движения довольно быстро переходят в состояние покоя. Тогда как из результатов вычислений по второй модели следует, что при учете в поперечных сечениях продольные силы и изгибающие моменты провод совершает длительные неустойчивые колебания с частотой 16 Гц.

Литература

1. Ильгамов М.А. Взаимодействие неустойчивостей в гидроупругой системе // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 566–579.
2. Гимадиев Р.Ш. Динамика деформирования провода электропередачи // Известия РАН МТТ. 2019. № 4. С. 63–75.
3. Havard D.G. Detuning for controlling galloping of single conductor transmission lines // IEEE Symposium on Mechanical Oscillations of Overhead Transmission Lines. Paper A 79 500-0. Vancouver, Canada. July, 1979.
4. Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Положение динамического равновесия изогнутого трубопровода с вибрирующими опорами // ДАН. 2021. № 1. С. 55–59. DOI: 10.31857/S2686740021010053.
5. Gimadiev R.Sh. Deformed state of onl wire taking into account bending rigidity // Dynamics. 2022. 2. Firstage-lastpage. <https://doi.org/10.3390/WWW.mdpi.com/jornal/dynamics>.
6. Гимадиев Р.Ш. Моделирование деформирования провода электропередачи с учетом изгибной жесткости. Сб. докладов II Международной науч. конф. (Минск, 3–6 октября 2022 г.). Минск: Беларуская навука, 2022. С. 209–215.
7. Девнин С.И. Гидроупругость конструкций при отрывном обтекании. Л.: Судостроение, 1975. 192 с.
8. Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Гостехтеориздат, 1961. 399 с.
9. Гимадиев Р.Ш. Динамика мягких оболочек парашютного типа. Казань, 2006. 2008 с.
10. Модифицированный провод для ЛЭП напряжением до 35 кВ марок ЗАЛП и ЗАЛП-В. URL: <http://ruscabel/zalp.html> (дата обращения: 10.03.2021 г.).
11. Шевченко Е.В., Удод Т.Е. Разработка методов борьбы с пляской проводов ВЛ для Украины // Металлические конструкции. 2006. Т. 12. № 4. С. 239–247.
12. Ryan Hugh. High Voltage Engineering and Testing. IET. 2001. P. 192.
13. Методические указания по типовой защите от вибрации и субколебаний проводов и грозозащитных тросов воздушных линий электропередачи

напряжением 35–750 кВ. РД 34.20.189-90. СПО ОРГРЭС. М., 1991.

References

1. Il'gamov M.A. Vzaimodeystvie neustoychivosti v gidrouprugoy sisteme // PMM, 2016, vol. 80, vyp. 5, pp. 566–579.
2. Gimadiev R.Sh. Dinamika deformirovaniya provoda elektropredachi // Izvestiya RAN MTT, 2019, no. 4, pp. 63–75.
3. Havard D.G. Detuning for controlling galloping of single conductor transmission lines // IEEE Symposium on Mechanical Oscillations of Overhead Transmission Lines. Paper A 79 500-0. Vancouver, Canada, July, 1979.
4. Il'gamov M.A., Shakir'yanov M.M. Polozheniya dinamicheskogo ravnesiya izognutogo truboprovoda s vibriruyushchimi oporami // DAN, 2021, no. 1, pp. 55–59. DOI: 10.31857/S2686740021010053.
5. Gimadiev R.Sh. Deformed state of onl wire taking into account bending rigidity // Dynamics, 2022, 2, Firstage-lastpage. <https://doi.org/10.3390/WWW.mdpi.com/journal/dynamics>.
6. Gimadiev R.Sh. Modelirovanie deformirovaniya provoda elektropredachi s uchetom izgibnoy

zhestkosti. Sbornik dokladov II Mezhdunarodnoy nauch. konf. (Minsk, 3–6 oktyabrya 2022 g.). Minsk: Belaruskaya navuka, 2022, pp. 209–215.

7. Devnin S.I. Gidrouprugost' konstruksiy pri otrivnom obtekanii. Leningrad: Sudostroenie, 1975, 192 p.
8. Rakhmatulin Kh.A., Dem'yanov Yu.A. Prochnost' pri intensivnykh kratkovremennyykh nagruzkakh. Moscow: Gostekhizdat, 1961. 399 p.
9. Gimadiev R.Sh. Dinamika myagkikh obolochek parashyutnogo tipa. Kazan', 2006. 2008 p.
10. Modifitsirovanny provod dlya LEP napryazheniem do 35 kV marok ZALP i ZALP-V. URL: <http://ruscabel/zalp.html>
11. Shevchenko E.V., Udod T.E. Razrabotka metodov bor'by s plyaskoy provodov VL dlya Ukrainy // Metallicheskie konstruksii, 2006, vol. 12, no. 4, pp. 239–247.
12. Ryan Hugh. High Voltage Engineering and Testing. IET, 2001, 192 p.
13. Metodicheskie ukazaniya po tipovoy zashchite ot vibratsii i subkolebaniy provodov i grozozashchitnykh trosov vozdukhnykh liniy elektropredachi napryazheniem 35–750 kV. RD 34.20.189-90. SPO ORGRES. Moscow, 1991.

UNSTABLE WIRE VIBRATIONS WITH FIXED ENDS

© R.Sh. Gimadiev

Kazan State Energy University,
51, ulitsa Krasnoselskaya, 420066, Kazan, Russian Federation

The dynamic behavior of a short-length wire is investigated using two mathematical models. The first model takes into account only longitudinal forces in cross sections, while the second model takes into account longitudinal and shear forces and bending moments. In each of the models, nonlinear differential equations of wire motion are solved numerically by the finite difference method. Numerical calculations show that in both models, the movement of the wire begins from an initial elongated state of rest under the influence of gravitational forces. It is shown that at a certain point in time, the amplitude of the deflection of the midpoint of the wire span reaches its maximum value. It is established that with the accepted parameters, the second calculation model gives an underestimated value of the specified amplitude. In addition, it is shown that in the latter case, unstable bending vibrations of the wire with a frequency of about 16 Hz occur over a long time interval.

Keywords: wire, deformation, vibrations, instability, numerical experiment, bending stiffness, sag.