

УДК 524.882

DOI: 10.31040/2222-8349-2025-0-3-36-41

СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНАЯ АККРЕЦИЯ НА ЧЕРНУЮ ДЫРУ С КВАНТОВОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ

© Р.М. Юсупова, А.М. Шихова

Аккреция – это процесс захвата вещества массивным объектом (нейтронной звездой, черной дырой и т.д.) из близлежащего пространства, что приводит к изменению массы центрального объекта. Данный процесс является широко распространенным явлением во Вселенной и отвечает за формирование звезд, планет и галактик. Предполагается, что сверхмассивные черные дыры в центрах спиральных и эллиптических галактик могли сформироваться благодаря процессу аккреции. В последнее время снова возрос интерес к аккреции на черные дыры после того, как в ходе экспериментов лазерно-интерферометрической гравитационно-волновой обсерватории (LIGO) было обнаружено множество изолированных черных дыр. Разница между аккрецией на изолированную черную дыру и черную дыру со спутником заключается в соотношении массы и энергии. В случае черной дыры, у которой есть звезда-компаньон (тесная двойная система), запас массы будет зависеть от состояния компаньона, а изолированная черная дыра может накапливать вещество, если в ее окрестностях есть рассеянный газ или на нее воздействует поток вещества. Впервые модель сферически-симметричной аккреции, известная как модель Бонди, на изолированную звезду в Ньютоновском приближении была предложена Х. Бонди и была рассмотрена в релятивистском приближении на черную дыру Шварцшильда Ф. Мишелем. Особенностью модели Бонди является то, что она позволяет наблюдать за эволюцией массы компактного объекта.

В работе рассматривается аккреция фантомной энергии и барионной материи (пыли, жесткой материи, квинтэссенции) на изолированную черную дыру с квантовой деформацией, описываемую решением Казакова–Солодухина. В результате было установлено, что при аккреции темной энергии ($\rho < 0$) масса центрального объекта уменьшается, а при аккреции барионной материи увеличивается. Влияние квантовой деформации на значения радиальной скорости, плотности жидкости и темпа аккреции незначительны.

Ключевые слова: аккреция, модель Бонди, черная дыра Казакова–Солодухина, параметр деформации, темп аккреции, плотность потока, радиальная скорость.

Введение. Как известно, общая теория относительности (ОТО) хорошо подтверждается экспериментально [1–3], но ОТО не может решить проблему сингулярности. Один из способов решения этой проблемы – объединение квантовой теории и ОТО. На сегодняшний день существует несколько решений для компактных объектов (черных дыр, кротовых нор и т.д.) с квантовыми поправками [4, 5], но в данной работе мы рассмотрим лишь одно из таких решений, известное как решение Казакова–Солодухина. Д.И. Казаков и С.Н. Солодухин показали, что если рассмотреть эффективную скалярно-тензорную гравитацию [6], пренебрегая несферическими деформациями, то возможно обобщение решения Шварцшильда. Исследование таких объектов интересно с точки

зрения наблюдательных характеристик, поэтому целью данной работы является изучение параметров сферически-симметричной аккреции на черную дыру Казакова–Солодухина. Например, в работе [7] были определены свойства тонких аккреционных дисков черных дыр, образованных вокруг черной дыры Казакова–Солодухина, в [8, 9] исследовался процесс аккреции на кротовые норы.

Рассмотрим обобщенную статичную сферически-симметричную метрику:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + \frac{1}{B(r)}dr^2 + C(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1)$$

где $A(r) > 0, B(r) > 0, C(r) > 0$ – метрические функции, зависящие только от r . Тогда, используя закон сохранения энергии-импульса

ЮСУПОВА Розалия Мансуровна, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, e-mail: yu.rose@mail.ru
ШИХОВА Анастасия Михайловна, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, e-mail: anastasiashikhova@yandex.ru

$0 = T_{\mu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu})_{,\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} T^{\alpha\mu}$, получим основные уравнения скорости и плотности жидкости:

$$(\rho + p)\sqrt{u^2 + B(r)}\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}}C(r) = A_1, \quad (2)$$

$$\frac{(\rho+p)}{\rho}u^2 + B(r)\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} = A_2, \quad (3)$$

где u – 4-х скорость, A_1, A_2 – постоянные интегрирования. В работе выбраны произвольные значения $A_1 = 1, A_2 = 1$.

Темп аккреции $\dot{M}$ определяется по формуле:

$$\dot{M} = 4\pi A_3 M^2 (\rho + p), \quad (4)$$

где $M = 1, A_3 = A_2 * A_4 / (1 + \omega), A_4 = 0.5$.

Для вычисления потока жидкости на массивный объект предполагается, что поток испытывает гладкий переход через критическую точку, т.е. при дифференцировании уравнений (2) и (3) можно получить выражение:

$$\left(V^2 - \frac{u^2}{u^2 + B} \right) \frac{du}{u} + \left((V^2 - 1) \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \frac{C'}{C} V^2 - \frac{B'}{2(u^2 + B)} \right) dr = 0. \quad (5)$$

Если в (6) приравнять две скобки к нулю, можно найти критические точки аккреции при $r = r_c$, т.н. звуковые или критические точки, в которых скорость движущейся жидкости равна скорости звука:

$$V^2 = \frac{u_c^2}{u_c^2 + B(r_c)}, \quad (6)$$

$$(V_c^2 - 1) \left[\frac{A'(r_c)}{A(r_c)} - \frac{B'(r_c)}{B(r_c)} \right] + \frac{A'(r_c)}{A(r_c)} V_c^2 = \frac{B'(r_c)}{2(u_c^2 + B(r_c))}. \quad (7)$$

После разделения величин V_c^2 и u_c^2 можно получить:

$$u_c^2 = \frac{B(r)C(r)A'(r)}{2A(r)C'(r)}, \quad (8)$$

$$V_c^2 = \frac{C(r)A'(r)}{C(r)A'(r) + 2A(r)C'(r)}, \quad (9)$$

где u_c – скорость жидкости, равная скорости звука, V_c – скорость звука, зависящая от геометрии пространства-времени.

Важно отметить, что V_c^2 и u_c^2 не могут быть отрицательными, так как:

$$\frac{A'(r_c)}{C'(r_c)} > 0. \quad (10)$$

Из уравнения (10) следует, что для заданных метрических компонент можно найти критический радиус в рассматриваемом пространстве-времени.

Предполагается, что аккрецирующая жидкость является изотропной идеальной жидко-

стью. Для идеальной жидкости справедливо баротропное уравнение:

$$p = \omega \rho, \quad (11)$$

где p – давление, ρ – плотность жидкости, ω – параметр состояния. В работе рассматриваются 4 типа жидкости, различающиеся значением параметра состояния: пыль ($\omega = 0$), жесткая материя ($\omega = 1$), квинтэссенция ($-1 < \omega < -1/3$), темная энергия ($\omega < -1$).

Решение для черной дыры с квантовой деформацией. Решение для черной дыры Казакова–Солодухина с квантовой деформацией описывается следующим линейным элементом:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (12)$$

$$f(r) = \left(\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r} - \frac{2M}{r} \right), \quad (13)$$

где M – масса черной дыры, a – параметр деформации. Следует отметить, что параметр деформации a обычно определяется по шкале Планка. Черные дыры Казакова–Солодухина имитируют поведение заряженных классических черных дыр Рейсснера–Нордстрема. Существует также соответствие между черными дырами Казакова–Солодухина с параметром деформации a и приливно заряженными черными дырами с зарядом q . В пределе слабого поля эти величины связаны соотношением $q = -\frac{a^2}{2}$, и, следовательно, существование точечного заряда приводит к квантовым флуктуациям фонового многообразия.

Радиус горизонта событий черной дыры Казакова–Солодухина определяется по формуле:

$$r_H = \sqrt{4M^2 + a^2}. \quad (14)$$

Далее для метрики (12)–(13) были получены аналитические выражения для скорости, плотности и темпа аккреции жидкости соответственно:

$$u(r) = -\frac{\sqrt{A_4^2 r + 2M(1+\omega)^2 - \sqrt{r^2 - a^2}(1+\omega)^2}}{(1+\omega)\sqrt{r}}, \quad (15)$$

$$\rho(r) = \frac{A_2(1+\omega)}{r^{3/2} \sqrt{A_4^2 r + 2M(1+\omega)^2 - \sqrt{r^2 - a^2}(1+\omega)^2}}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}(r) &= 16\pi A_2 \rho = \\ &= \frac{4A_2^2 A_4 M^2 \pi (1+\omega)}{r^{3/2} \sqrt{A_4^2 r + 2M(1+\omega)^2 - \sqrt{r^2 - a^2}(1+\omega)^2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражения для критической скорости жидкости и скорости звука в пространстве-времени черной дыры Казакова–Солодухина имеют вид:

$$u_c^2 = \frac{2M\sqrt{r^2 - a^2} + a^2}{4r\sqrt{r^2 - a^2}} \quad (18)$$

$$V_c^2 = \frac{a^2 + 2M\sqrt{r^2 - a^2}}{-3a^2 + 4r^2 - 6M\sqrt{r^2 - a^2}} \quad (19)$$

Далее представим графически зависимость от расстояния скорости, плотности и темпа аккреции жидкости из уравнений (16), (17) и (18) для различных значений параметра состояния ω .

На рис. 1 представлен график зависимости скорости аккреции от расстояния при различных параметрах состояния. Как видно из графика, при $r \rightarrow 0$, $u(r) \rightarrow \infty$ и при $r \rightarrow 0$, $u(r) \rightarrow \infty$. При аккреции квинтэссенции, пыли, жесткой материи скорости принимают отрицательные значения $u(r) < 0$, это означает, что радиальная скорость уменьшается при приближении к центральному объекту. И, наоборот, при аккреции темной энергии значение скорости положительно, а значит, вещество отталкивается от черной дыры. Влияние параметра деформации при различных значениях a на абсолютное значение радиальной скорости незначительны.

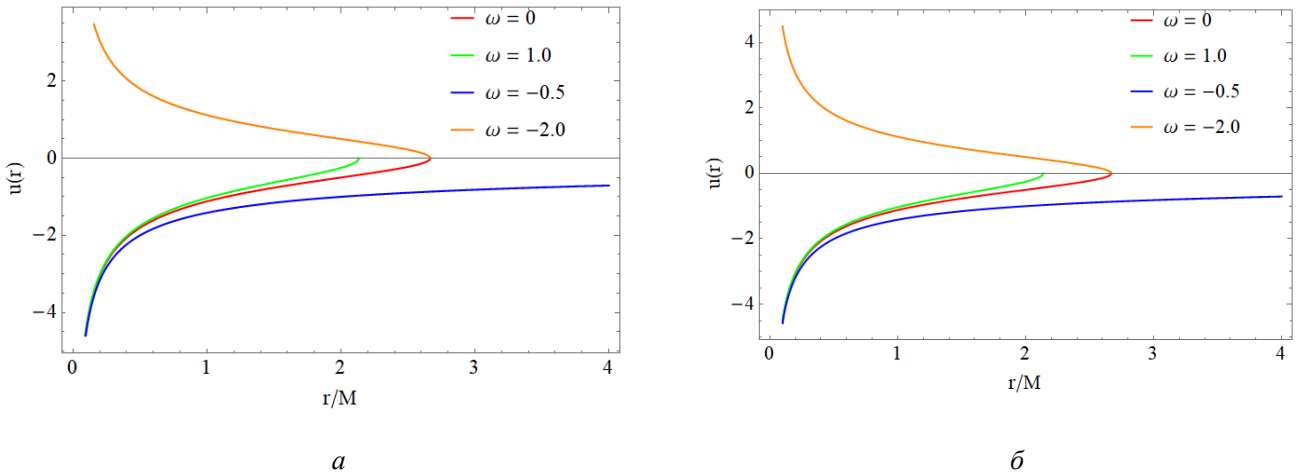


Рис. 1. Профиль радиальной скорости жидкости при различных значениях параметра состояния ($\omega = 0$ – пыль; $\omega = 1$ – жесткая материя; $\omega = -0.5$ – квинтэссенция; $\omega = -2$ – темная энергия) в зависимости от $\frac{r}{M}$ для двух случаев: $a = 0.1$ (а); $a = 0.01$ (б)

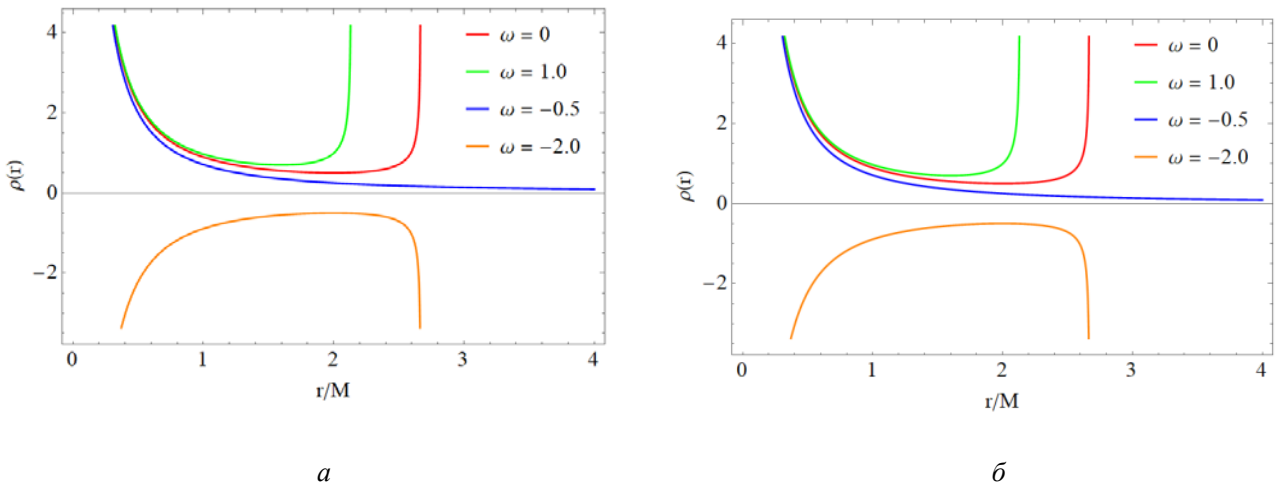


Рис. 2. Профиль плотности жидкости при различных значениях параметра состояния ($\omega = 0$ – пыль; $\omega = 1$ – жесткая материя; $\omega = -0.5$ – квинтэссенция; $\omega = -2$ – темная энергия) в зависимости от $\frac{r}{M}$ для двух случаев: $a = 0.1$ (а); $a = 0.01$ (б)

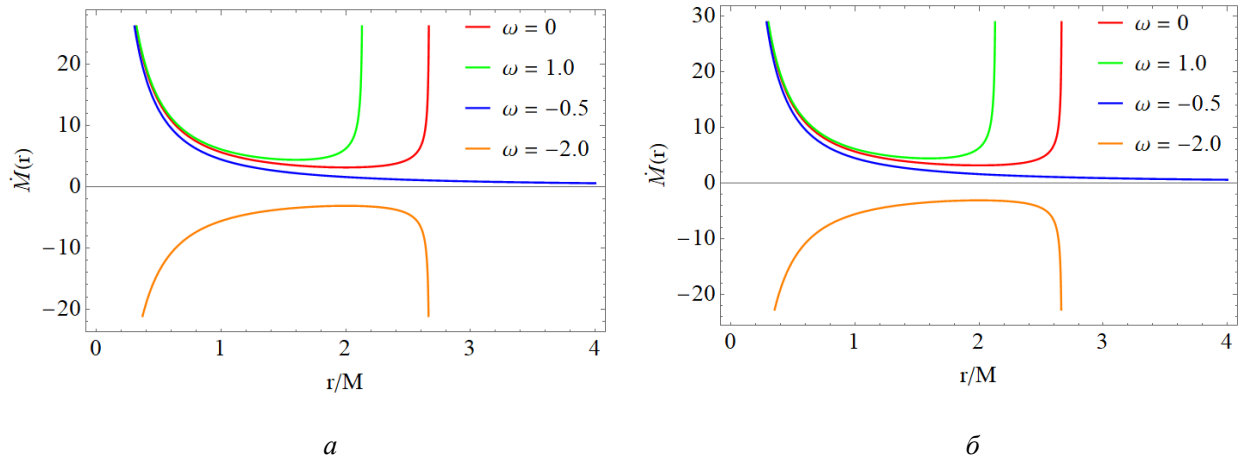


Рис. 3. Профиль темпа аккреции при различных значениях параметра состояния ($\omega = 0$ – пыль; $\omega = 1$ – жесткая материя; $\omega = -0.5$ – квинтэссенция; $\omega = -2$ – темная энергия) в зависимости от $\frac{r}{M}$ для двух случаев: $a = 0.1$ (а); $a = 0.01$ (б)

На рис. 2 приведен график плотности жидкости в зависимости от расстояния. Из графика видно, что при $\omega = 0$, $\omega = 1$, $\omega = -0.5$ плотность аккрецирующей жидкости возрастает по мере приближения к черной дыре. При $\omega = -2$ плотность становится отрицательной. Асимптотически плотность жидкости приближается к максимуму вблизи черной дыры из-за сильного (и, возможно, квантового) гравитационного взаимодействия.

На рис. 3 представлен график зависимости темпа аккреции от расстояния при различных значениях параметра состояния. При малых значениях r , т.е. вблизи центрального объекта, $\dot{M} > 0$ означает, что масса черной дыры Казакова–Солодухина возрастает при аккреции пыли, жесткой материи и квинтэссенции. Темп аккреции $\dot{M} < 0$ в случае фантомной энергии ведет к уменьшению массы черной дыры Казакова–Солодухина. Схожие результаты были получены в работах [11–14] для других решений, описывающих геометрию черных дыр и кротовых нор.

Выводы. В работе были исследованы особенности течения жидкости (типа аккреции Бонди) на черную дыру с квантовой деформацией. В частности, рассматривались пыль, жесткая материя, квинтэссенция и фантомная энергия, но не рассматривались космологическая постоянная, поскольку она не аккрецирует на черные дыры и кротовые норы [14–15]. Обнаружено, что жидкости с различными параметрами состояния имеют различную эволюцию на фоне черной дыры, т.е. некоторые жид-

кости приобретают положительную или отрицательную плотность вблизи рассматриваемого объекта. Также было установлено, что аккреция темной энергии ведет к уменьшению массы черной дыры Казакова–Солодухина, тогда как аккреция пыли, жесткой материи, квинтэссенции увеличивает массу объекта. Важно отметить, что в работе не рассматривалась обратная реакция метрики на аккрецию, следовательно, можно допустить, что темп аккреции может принимать большие значения. Влияние параметра деформации на профили скорости, плотности и темпа аккреции незначительны.

Литература

1. Abbott B.P. et al. [LIGO Scientific and VIRGO Collaborations]. GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2 // Phys. Rev. Lett. 2017. V. 118. P. 221101.
2. Akiyama K. et al. [Event Horizon Telescope], First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole // Astrophys. J. Lett. 2019. V. 875. P. L1.
3. Akiyama K. et al. [Event Horizon Telescope]. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. VI. Testing the Black Hole Metric // Astrophys. J. Lett. 2022. V. 930. № 2. P. L17.
4. Damour Th., Solodukhin S.N. Wormholes as black hole foils // Phys. Rev. D. 2007. V. 76. P. 024016.
5. Kazakov D.I. and Solodukhin S.N. On Quantum Deformation of the Schwarzschild Solution // Nucl. Phys. B. 1994. V. 429. P. 153–176.
6. Peng J., Guo M. and Feng X.H. Influence of quantum correction on black hole shadows, photon rings, and lensing rings // Chin. Phys. C. 2021. V. 45. № 8. P. 085103.

7. Sen Guo and *et.al.* Influence of quantum correction on the Schwarzschild black hole polarized image // *Astrophys. J.* 2025. V. 979. № 1. P. 61.

8. Юсупова Р.М., Измаилов Р.Н. Физические свойства тонкого аккреционного диска черной дыры Тауб-Нута // *Известия Уфимского научного центра РАН.* 2021. № 1. С. 87–91.

9. Юсупова Р.М., Мухтарова Г.Р., Измаилов Р.Н. Предел светимости эддингтона для безмассовых кротовых нор со скалярным полем // *Известия Уфимского научного центра РАН.* 2022. № 1. С. 21–24.

10. Karimov R.Kh., Izmailov R.N., Bhattacharya A., Nandi K.K. Accretion disks around the Gibbons-Maeda-Garfinkle-Horowitz-Strominger charged black holes // *The European Physical Journal C.* 2018. V. 78. P. 788.

11. Yusupova R.M., Karimov R.Kh., Izmailov R.N., Nandi K.K. Accretion Flow onto Ellis-Bronnikov Wormhole // *Universe.* 2021. V. 7. P. 177.

12. González-Díaz P.F. On the accretion of phantom energy onto wormholes // *Physics Letters B.* 2006. V. 632(2-3), P. 159–161.

13. Babichev E.O., Dukuchaev V.I., Eroshenko Yu.N. Black holes in the presence of dark energy // *Physics–Uspekhi.* 2013. V. 183. № 12. P. 1257–1280.

14. Yusupova R.M., Karimov R.Kh., Bhattacharya A. Bondi Accretion onto a Damour–Solodukhin Wormhole // *Gravitation and Cosmology.* 2025. V. 31. № 1. P. 37–45.

References

1. Abbott B.P. et al. [LIGO Scientific and VIRGO Collaborations]. GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2 // *Phys. Rev. Lett.*, 2017, vol. 118. 221101 p.

2. Akiyama K. et al. [Event Horizon Telescope], First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole // *Astrophys. J. Lett.*, 2019, vol. 875, L1 p.

3. Akiyama K. et al. [Event Horizon Telescope]. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results.

VI. Testing the Black Hole Metric // *Astrophys. J. Lett.*, 2022, vol. 930, no. 2, L17 p.

4. Damour Th., Solodukhin S.N. Wormholes as black hole foils // *Phys. Rev. D.*, 2007, V. 76, 024016 p.

5. Kazakov D.I. and Solodukhin S.N. On Quantum Deformation of the Schwarzschild Solution // *Nucl. Phys. B.*, 1994, vol. 429, pp. 153–176.

6. Peng J., Guo M. and Feng X.H. Influence of quantum correction on black hole shadows, photon rings, and lensing rings // *Chin. Phys. C.*, 2021, vol. 45, no. 8, 085103 p.

7. Sen Guo and *et.al.* Influence of quantum correction on the Schwarzschild black hole polarized image // *Astrophys. J.*, 2025, vol. 979, no. 1, 61 p.

8. Yusupova R.M., Izmailov R.N. Fizicheskie svoystva tonkogo akkretionnogo diska chernoy dyry Taub-Nut // *Izvestiya Ufinskogo nauchnogo tsentra RAN*, 2021, no. 1, pp. 87–91.

9. Yusupova R.M., Mukhtarova G.R., Izmailov R.N. Predel svetimosti eddingtona dlya bezmassovykh krotovykh nor so skalyarnym polem // *Izvestiya Ufinskogo nauchnogo tsentra RAN*, 2022, no. 1, pp. 21–24.

10. Karimov R.Kh., Izmailov R.N., Bhattacharya A., Nandi K.K. Accretion disks around the Gibbons-Maeda-Garfinkle-Horowitz-Strominger charged black holes // *The European Physical Journal C.*, 2018, vol. 78, 788 p.

11. Yusupova R.M., Karimov R.Kh., Izmailov R.N., Nandi K.K. Accretion Flow onto Ellis-Bronnikov Wormhole // *Universe.* 2021, vol. 7, 177 p.

12. González-Díaz P.F. On the accretion of phantom energy onto wormholes // *Physics Letters B.*, 2006, vol. 632(2-3), pp. 159–161.

13. Babichev E.O., Dukuchaev V.I., Eroshenko Yu.N. Black holes in the presence of dark energy // *Physics–Uspekhi*, 2013, vol. 183, no. 12, pp. 1257–1280.

14. Yusupova R.M., Karimov R.Kh., Bhattacharya A. Bondi Accretion onto a Damour–Solodukhin Wormhole // *Gravitation and Cosmology*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 37–45.



SPHERICALLY SYMMETRIC ACCRETION ONTO A BLACK HOLE WITH QUANTUM DEFORMATION

© R.M. Yusupova, A.M. Shikhova

Akmullah Bashkir State Pedagogical University,
3a, ulitsa Oktybrskoy revolyutsii, 450008, Ufa, Russian Federation

Accretion is the process of capturing matter by a massive object (a neutron star, a black hole, etc.) from nearby space, which leads to a change in the mass of the central object. This process is a widespread phenomenon in the universe and is responsible for the formation of stars, planets and galaxies. It is assumed that supermassive black holes in the centers of spiral and elliptical galaxies could form due to the accretion process. Recently, interest in black hole accretion has increased again after numerous isolated black holes were discovered during experiments at the Laser Interferometric Gravitational Wave Observatory (LIGO). The difference between accretion to an isolated black hole and a black hole with a satellite is the ratio of mass and energy. In the case of a black hole that has a companion star (a close binary system), the mass reserve will depend on the state of the companion, and an isolated black hole can accumulate matter if there is scattered gas in its vicinity or a stream of matter affects it. For the first time, a model of spherically symmetric accretion, known as the Bondi model, for an isolated star in the Newtonian approximation was proposed by H. Bondi and was considered in the relativistic approximation for a Schwarzschild black hole by F. Michel. A special feature of the Bondi model is that it allows you to observe the evolution of the mass of a compact object.

The paper considers the accretion of phantom energy and baryonic matter (dust, hard matter, and quintessence) onto an isolated black hole with quantum deformation described by Kazakov–Solodukhin [5]. It is shown that with the accretion of dark energy ($\rho < 0$) the mass of the central object decreases, and with the accretion of baryonic matter it increases. The effect of quantum deformation on the radial velocity, fluid density, and accretion rate is negligible.

Keywords: accretion, Bondi model, Kazakov–Solodukhin black hole, deformation parameter, accretion rate, flow density, radial velocity.