

УДК 539.183.5

DOI: 10.31040/2222-8349-2025-0-1-12-16

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УТОЧНЕННОГО РАЗМЕРА ПОЗИТРОНИЯ

© И.П. Попов

При определении боровского радиуса позитрония использован заимствованный из теоретической механики метод решения задачи двух тел, ключевым элементом которого является приведенная масса. Показано, что существует достаточно распространенная ошибка в одном частном случае решения задачи двух тел. Эта ошибка переносится на атом позитрония, в результате чего его боровский радиус определен существенно некорректно. Целью работы является корректировка значения боровского радиуса позитрония. Предпосылкой ошибки в одном частном случае решения задачи двух тел является круговое движение двух материальных точек с равными массами вокруг неподвижного центра их масс. Сама предпосылка ошибочной не является. Ошибка состоит в том, что радиус вращения (относительно центра масс) находят по формуле, полученной при условиях, которые для материальных точек одинаковой массы не выполняются. В соответствии с ошибочной схемой решения считается, что радиус позитрония в два раза больше боровского радиуса водорода. Двукратно уточненное значение радиуса позитрония установлено методами теоретической (классической) механики. Однако позитроний является квантовым объектом. Поэтому в работе выполняется квантовомеханическое решение. Если гипотетически у позитрония исключить позитрон, а в центре масс неподвижно установить гипотетическую частицу с зарядом, равным четверти заряда позитрона, то электрон не «заметит» подмены, и характер его движения не изменится. Единственное отличие рассматриваемой гипотетической системы от атома водорода состоит в том, что ее потенциальная энергия в четыре раза меньше. Следовательно, можно использовать хрестоматийное квантовомеханическое решение для атома водорода с поправкой на уменьшенную вчетверо потенциальную энергию. Установлено, что расчетный минимальный радиус позитрония (расстояние от его центра масс, на котором вероятность нахождения электрона/позитрона максимальна) равен четырем, а не двум боровским радиусам водорода, как указано в литературе.

Ключевые слова: позитроний, водород, электрон, позитрон, боровский радиус.

Введение. Состояние вопроса характеризуется цитатой: «Поскольку позитроний является полным структурным аналогом водородного атома, такие его характеристики, как ... радиус ... хорошо описываются в рамках простой теории Бора – с заменой приведенной массы $M_H \approx m$ на $M_{Ps} = m/2$. Соответственно ... боровский радиус позитрония ... вдвое больше, чем для ... водорода: $a_{Ps} = 2a_0$ » [1].

При определении боровского радиуса позитрония использован заимствованный из теоретической механики метод решения задачи двух тел, ключевым элементом которого является *приведенная масса*.

Далее будет показано, что существует достаточно распространенная ошибка в одном частном случае решения задачи двух тел.

Эта ошибка переносится на атом позитрония, в результате чего его боровский радиус определен существенно некорректно [1–3].

Целью работы является корректировка значения боровского радиуса позитрония.

Предпосылка ошибки в одном частном случае решения задачи двух тел

(Сама предпосылка ошибочной не является.)

Указанной предпосылкой является *круговое* движение двух материальных точек с массами m_1 и m_2 вокруг *неподвижного* центра их масс. Можно считать $m \approx m_2$, т.к.

$$m_1 \gg m_2. \quad (1)$$

Уравнение движения имеет вид:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}, \quad (2)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ – сила притяжения между материальными точками, $\mathbf{r}$ – вектор смещения, m – приведенная масса.

Сила в левой части уравнения (2) равна

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^3} \mathbf{r}, \quad (3)$$

где k – размерный коэффициент. Ускорение в правой части уравнения (2) является центростремительным

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{v^2}{r^2} \mathbf{r}, \quad (4)$$

где v – линейная скорость одной материальной точки относительно другой. При этом $r \approx r_2$, $v \approx v_2$, где r_2 – радиус вращения второй материальной точки относительно центра масс, v_2 – линейная скорость второй материальной точки относительно центра масс. С учетом сделанных допущений уравнение (2) приобретает вид:

$$-\frac{k}{r^3} \mathbf{r} = -m \frac{v^2}{r^2} \mathbf{r}, \text{ или } m \frac{\omega^2 r^2}{r^2} = m \omega^2, \quad (5)$$

Момент импульса второй материальной точки относительно центра масс равен

$$\mathbf{L} = m_2 r_2^2 \boldsymbol{\omega}_2. \quad (6)$$

$$\omega_2 = \omega. \quad (7)$$

Проведя ряд алгебраических преобразований, получим

$$r = \frac{L^2}{km}.$$

Учитывая, что $r \approx r_2$, $m \approx m_2$ найдем минимальный радиус окружности, за пределы которой не выходит система двух тел

$$r_0 = \frac{L^2}{km_2}. \quad (8)$$

Это соотношение математически изоморфно формуле для борковского радиуса атома водорода (тоже почти равного модулю вектора смещения)

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} = \frac{\hbar^2}{k_H m_e},$$

поскольку $\hbar$ – это момент импульса.

Представленное решение является прототипом для полуклассического определения размера атома водорода.

Ошибка в одном частном случае решения задачи двух тел

Ошибка в частном случае решения задачи двух тел *одинаковой массы*

$$m_1 = m_2, \quad (9)$$

совершающих *круговое* движение вокруг *неподвижного* центра их масс, состоит в том, что радиус вращения (относительно центра масс)

находят по формуле $r_0 = \frac{L^2}{km}$, полученной при учете обозначенных в предыдущем параграфе условий, которые для материальных точек

одинаковой массы **не выполняются**. При этом ошибочная *схема* решения состоит в следующем

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{2} = \frac{m_2}{2}, \quad (10)$$

$$r_0^* = \frac{L^2}{km} = \frac{L^2}{k(m_2/2)} = 2r_0. \quad (11)$$

В соответствии с этой схемой решения считается, что радиус позитрония тоже в два раза больше борковского радиуса водорода [1–3].

Корректное решение задачи двух тел одинаковой массы (совершающих *круговое* движение вокруг неподвижного центра их масс)

Получим выражение для

$$r_0^{**} = r_2 = 4 \frac{L^2}{km_2} = 4r_0 \quad (12)$$

при следующих соотношениях для $r_2 = \frac{r}{2}$,

$v_2 = \frac{v}{2}$, рассчитанный по формуле (12) радиус

в четыре раза превышает величину, полученную по формуле (11), что может говорить о достаточно распространенной ошибке при определении радиуса системы двух материальных точек одинаковой массы в частном случае решения задачи двух тел (совершающих *круговое* движение вокруг неподвижного центра их масс).

В этой связи радиус позитрония не в два, а в четыре раза больше борковского радиуса.

Замечание о методике

В задаче двух тел решаются два дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_{cm}}{dt^2} = 0$$

и (2). Здесь $\mathbf{r}_{cm}$ – радиус-вектор центра масс.

Решения этих двух уравнений:

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_{cm}(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}(t),$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_{cm}(t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}(t),$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ – радиус-векторы тел.

В рассматриваемом частном случае ($m_1 = m_2$) $\mathbf{r}_{cm} = 0$, $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}/2$. Поэтому решения сводятся к тавтологии:

$$\mathbf{r}_1(t) = 0 + \frac{1}{2}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t),$$

$$\mathbf{r}_2(t) = 0 - \frac{1}{2}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_2(t).$$

Из этого следует, что в рассматриваемом частном случае методика задачи двух тел является избыточной и с успехом может быть заменена на решение задачи движения одного из тел, движущегося относительно центра масс [4]. Это позволяет получить более наглядное и очевидное решение без избыточного формализма с приведенной массой и вектором смещения.

Исходя из баланса сил по аналогии с (5)

$$\frac{k}{(2r_2)^2} = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} = m_2 \omega^2 r_2 \quad (13)$$

найдем

$$r_2 = 4 \frac{L^2}{km_2},$$

что совпадает с (12).

Представленные рассуждения о методике могут не представлять серьезной ценности для классической механики. Однако, как будет показано дальше, они оказываются весьма кстати для квантовой механики.

О размере позитрония

Выше двукратно уточненное значение радиуса позитрония установлено методами теоретической (классической) механики. Однако позитроний является квантовым объектом [5–7]. Поэтому далее выполняется квантовомеханическое решение. За основу взяты хрестоматийные решения [8]. Последующее изложение ведется в СГС в ее гауссовой форме, как и в указанном источнике.

Уравнение Шредингера для системы двух взаимодействующих частиц (электрона и позитрона [9]) имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(\mathbf{r})\psi = E\psi. \quad (14)$$

Здесь m – приведенная масса (15), $\mathbf{r}$ – вектор смещения.

В решении задачи двух частиц квантовая механика заимствовала у теоретической механики принцип задачи двух тел. В этой связи, во избежание двойных стандартов, уместно учесть приведенное выше замечание о методике в части нахождения решения задачи двух тел в виде эквивалентного решения для одного из тел, движущегося относительно *неподвижного цен-*

тра масс, тем более, что существует достоверное квантовомеханическое решение для случая сферически симметричного силового поля, предполагающее силовой центр *неподвижным*. Последнее особенно важно, поскольку подвижность силового центра (электрического заряда) может приводить к излучению и, следовательно, изменению энергетического баланса [10].

В решении задачи двух частиц (14) рассматривается движение одной из них относительно второй (электрона относительно позитрона или наоборот), и использовать метод сферически симметричного силового поля проблематично, поскольку силовой центр в этом случае фактически не является неподвижным (более чем).

И действительно, использование хрестоматийного решения [8] для атома водорода применительно к (14) дает

$$r = \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{\hbar^2}{(m_e/2)me^2} = 2a_0,$$

(где a_0 – боровский радиус). На первый взгляд результат соответствует (11) и [1–3].

Но $\mathbf{r}$ – это вектор смещения. Его модуль – это диаметр, а не радиус позитрония. Следовательно, указанное решение приводит к тому, что радиус позитрония равен боровскому радиусу водорода, что неприемлемо.

В этой связи тем более следует учесть приведенное выше замечание о методике и рассматривать движение электрона/позитрона относительно *неподвижного центра масс*.

Сила притяжения между частицами в позитронии равна

$$\frac{e_+ e_-}{4\pi\epsilon_0 (2r)^2} = \frac{e_+}{4} \frac{e_-}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (15)$$

где r – расстояние между любой из частиц и центром их масс.

Если гипотетически у позитрония исключить позитрон, а в центре масс *неподвижно* установить гипотетическую частицу с зарядом, равным четверти заряда позитрона (в соответствии с (15)), то электрон не «заметит» подмены, и характер его движения не изменится.

В этом случае потенциальная энергия электрона в системе координат, связанной с центром масс, равна

$$U = \int_{\infty}^r \frac{1}{4} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{1}{4} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Единственное отличие рассматриваемой гипотетической системы от атома водорода со-

стоит в том, что ее потенциальная энергия в четыре раза меньше. Следовательно, можно использовать хрестоматийное квантовомеханическое решение для атома водорода [8] с поправкой на уменьшенную вчетверо потенциальную энергию. При этом уравнение Шредингера в полярных координатах примет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + \left(\frac{1}{4} \frac{q}{r} - \beta^2 \right) \psi = 0, \quad (16)$$

где

$$\beta^2 = \frac{2m_e E}{\hbar^2}, \quad q = \frac{2m_e e^2}{\hbar^2}.$$

Волновая функция

$$\psi(r) = C e^{-r/a}.$$

Подстановка в (16) дает

$$a = 4 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 4a_0 \left(4 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} \text{ в СИ} \right),$$

т.е. четыре боровских радиуса водорода.

Вероятность нахождения электрона/позитрона в сферическом слое между r и $r+dr$ равна произведению объема этого слоя $4\pi r^2 dr$ и объемной плотности вероятности $|\psi|^2$

$$p_r dr = 4\pi r^2 |\psi|^2 dr.$$

Здесь p_r – радиальная плотность вероятности.

$$p_r = 4\pi C^2 r^2 e^{-2r/(4a_0)}.$$

Нормировка

$$\int_0^\infty p_r dr = 4\pi C^2 \int_0^\infty r^2 e^{-2r/(4a_0)} dr = 1,$$

дает условие

$$C = \sqrt{\frac{1}{\pi(4a_0)^3}}.$$

Максимум функции p_r находится из условия

$$\frac{dp_r}{dr} = \frac{1}{8a_0^3} r e^{-2r/(4a_0)} - \frac{1}{16a_0^3} r^2 e^{-2r/(4a_0)} \frac{2}{4a_0} = 0,$$

$$r_1 = 4a_0. \quad (17)$$

На расстоянии $4a_0$ от центра масс позитрония вероятность нахождения электрона/позитрона максимальна. Это практически вдвое больше, чем принято считать.

Заключение. Установлена достаточно пространственная ошибка в частном случае решения задачи двух тел одинаковой массы, совер-

шающих круговое движение вокруг неподвижного центра их масс, состоящая в том, что ра-

диус вращения находят по формуле $r_0 = \frac{L^2}{km}$,

полученной при допущениях $m_1 \gg m_2$, $m \approx m_2$, $r \approx r_2$, $v \approx v_2$, которые для материальных точек одинаковой массы не выполняются. Эта ошибка приводит к двукратному уменьшению вычисленного радиуса вращения, что является очень большой погрешностью.

В рассматриваемом частном случае методика задачи двух тел является избыточной и с успехом может быть заменена на решение задачи движения одного из тел, движущегося относительно центра масс.

Вычислен радиус кругового движения тел одинаковой массы вокруг неподвижного центра их масс.

Установлено, что *расчетный* минимальный радиус позитрония (расстояние от его центра масс, на котором вероятность нахождения электрона/позитрона максимальна) равен четырем, а не двум боровским радиусам водорода, как указано в литературе.

При этом классическое (12) и квантовое (17) решения не противоречат друг другу.

Литература

1. Гольданский В.И. Физическая химия позитрона и позитрония. М.: Наука, 1968. 174 с.
2. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981. 428 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: Физматлит, 2002. 720 с.
4. Павлов В.Д. Инерциальные абсолютные и относительные системы отсчета // Известия Уфимского научного центра РАН. 2023. № 2. С. 15–19. DOI: 10.31040/2222-8349-2023-0-2-15-19
5. Седов Е.А., Завьялов В.В., Арутюнов К.Ю. Квантовый размерный эффект в сверхпроводниках // Известия Уфимского научного центра РАН. 2021. № 1. С. 39–43. DOI: 10.31040/2222-8349-2021-0-1-39-43
6. Попов И.П. Противоречия копускулярно-волнового обобщения // Известия Уфимского научного центра РАН. 2016. № 1. С. 32–34.
7. Попов И.П. Получение макромеханических величин с помощью квантово-механических дифференциальных уравнений // Известия Уфимского научного центра РАН. 2022. № 3. С. 12–15. DOI: 10.31040/2222-8349-2022-0-3-12-15
8. Сивухин Д.В. Атомная и ядерная физика. М.: Физматлит, 2002. 784 с.

9. Минакова Е.Н., Михайлова Е.А., Михайлова В.А. Перенос электрона на парамагнитный центр // Известия Уфимского научного центра РАН. 2022. № 1. С. 30–34. DOI: 10.31040/2222-8349-2022-0-1-30-34

10. Павлов В.Д. Энергетика излучения электрического заряда и ее следствия // Известия Уфимского научного центра РАН. 2021. № 4. С. 5–8. DOI: 10.31040/2222-8349-2021-0-4-5-8

References

1. Gol'danskiy V.I. Fizicheskaya khimiya pozitrona i pozitroniya. Moscow: Nauka, 1968, 174 p.

2. Akhiezer A.I., Berestetskiy V.B. Kvantovaya elektrodinamika. Moscow: Nauka, 1981, 428 p.

3. Landau L.D., Lifshits Ye.M., Pitayevskiy L.P. Kvantovaya elektrodinamika. Moscow: Fizmatlit, 2002, 720 p.

4. Pavlov V.D. Inertsial'nyye absolyutnyye i otnositel'nyye sistemy otscheta // Izvestiya Ufmskogo nauchnogo tsentra RAN, 2023, no. 2, pp. 15–19. DOI: 10.31040/2222-8349-2023-0-2-15-19

5. Sedov Ye.A., Zav'yalov V.V., Arutyunov K.YU. Kvantovyy razmernyy effekt v sverkhprovodnikakh //

Izvestiya Ufmskogo nauchnogo tsentra RAN, 2021, no. 1, pp. 39–43. DOI: 10.31040/2222-8349-2021-0-1-39-43

6. Popov I.P. Protivorechiya kopuskulyarnovolnovogo obobshcheniya // Izvestiya Ufmskogo nauchnogo tsentra RAN, 2016, no. 1, pp. 32–34.

7. Popov I.P. Polucheniye makromekhanicheskikh velichin s pomoshch'yu kvantovo-mekhanicheskikh differentsial'nykh uravneniy // Izvestiya Ufmskogo nauchnogo tsentra RAN, 2022, no. 3, pp. 12–15. DOI: 10.31040/2222-8349-2022-0-3-12-15

8. Sivukhin D.V. Atomnaya i yadernaya fizika. Moscow: Fizmatlit, 2002, 784 p.

9. Minakova Ye.N., Mikhaylova Ye.A., Mikhaylova V.A. Perenos elektrona na paramagnitnyy tsentr // Izvestiya Ufmskogo nauchnogo tsentra RAN, 2022, no. 1, pp. 30–34. DOI: 10.31040/2222-8349-2022-0-1-30-34

10. Pavlov V.D. Energetika izlucheniya elektricheskogo zaryada i yeye sledstviya // Izvestiya Ufmskogo nauchnogo tsentra RAN, 2021, no. 4, pp. 5–8. DOI: 10.31040/2222-8349-2021-0-4-5-8

DETERMINATION OF THE REFINED SIZE OF POSITRONIUM

© I.P. Popov

Kurgan State University,
63/4, ulitsa Sovetskaya, 640020, Kurgan, Russian Federation

When determining the Bohr radius of positronium, a method for solving the two-body problem was used, borrowed from theoretical mechanics, the key element of which is the reduced mass. It is shown that there is a fairly common error in one particular case of solving the two-body problem. This error is transferred to the positronium atom, as a result of which its Bohr radius is determined significantly incorrectly. The goal of the work is to correct the value of the Bohr radius of positronium. The prerequisite for the error in one particular case of solving the two-body problem is the circular motion of two material points with equal masses around a fixed center of their masses. The premise itself is not wrong. The mistake is that the radius of rotation (relative to the center of mass) is found using a formula obtained under conditions that are not satisfied for material points of the same mass. In accordance with the erroneous solution scheme, it is believed that the radius of positronium is twice the Bohr radius of hydrogen. The doubly refined value of the positronium radius was established by methods of theoretical (classical) mechanics. However, positronium is a quantum object. Therefore, the work performs a quantum mechanical solution. If, hypothetically, the positron is excluded from positronium, and a hypothetical particle with a charge equal to a quarter of the positron's charge is fixedly installed at the center of mass, then the electron will not "notice" the substitution, and the nature of its movement will not change. The only difference between the hypothetical system under consideration and the hydrogen atom is that its potential energy is four times less. Therefore, it is possible to use the textbook quantum mechanical solution for the hydrogen atom, corrected for the potential energy reduced by four. It has been established that the calculated minimum radius of positronium (the distance from its center of mass at which the probability of finding an electron/positron is maximum) is equal to four, and not two Bohr radii of hydrogen, as indicated in the literature.

Keywords: positronium, hydrogen, electron, positron, Bohr radius.