ФИЗИКА

УДК 532.685
DOI: 10.31040/2222-8349-2024-0-1-72-78

ЗАДАЧА О НЕЛИНЕЙНОМ ФИЛЬТРАЦИОННОМ ПОЛЕ ДАВЛЕНИЯ В СРЕДЕ СО СЛАБОСЖИМАЕМЫМ СКЕЛЕТОМ

© А.И. Филиппов, О.В. Ахметова

Представлено решение задачи о поле давления при фильтрации сжимаемого флюида в пористой среде с несжимаемым скелетом при наличии возмущений высокой амплитуды. Уравнение, описывающее изменения давления при разработке месторождения, учитывает сжимаемость флюида и представлено в нелинейном виде. Известные зависимости плотности фильтрующейся среды от давления аппроксимированы линейной функцией. Движение предполагается одномерным и горизонтальным. Пористость, плотность и проницаемость скелета пористой среды, а также вязкость фильтрующейся среды считаются постоянными.

Решение задачи найдено с использованием асимптотического разложения по формальному параметру, добавленному в задаче как сомножитель к сжимаемости флюида. Найдено приближенное аналитическое решение нелинейной задачи о фильтрационном поле давления в нулевом и первом приближениях. Нулевой и первый коэффициенты представляются решениями квазистационарных уравнений, в которые время входит как параметр через размеры зоны возмущений, определяемые законом сохранения массы. Установлено, что учет нелинейности приводит к уменьшению размеров зоны возмущений поля давления.

Предложен подход к определению верхней границы зоны возмущений в нелинейных задачах такого рода, который основан на использовании законов сохранения. Показано, что частный случай нулевого приближения совпадает с решением линейной задачи, полученным по методу смены последовательных стационарных состояний. Найденные выражения расширяют возможности исследования высокоамплитудных процессов фильтрации, а предлагаемый подход снимает ограничения классических подходов, связанных с пренебрежением зависимостью плотности флюида от давления в дивергентном члене уравнения неразрывности. Использованный метод позволяет построить аналитические выражения для коэффициентов разложения порядков выше первого, кроме того, он создает возможность исследования вклада нелинейности, вызванной зависимостью проницаемости и вязкости от давления.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, фильтрация, давление, асимптотическое разложение.

Процессы фильтрации находят широкое применение в различных технологических процессах и технических устройствах. Исследование этих процессов занимает важное место в гидрогеологии и миграции воды и газа в земной коре, а также в решении сопутствующих экологических проблем [1–3]. Важная роль принадлежит процессам фильтрации в нефте- и газодобыче [4–8].

В общем случае соответствующие задачи о полях давления в пористых средах являются нелинейными и их решение затруднено. Среди практически важных задач теории фильтрации выделяется класс, когда сжимаемостью скелета, в сравнении со сжимаемостью насыщающего флюида, можно пренебречь. Между тем сжимаемость фильтрующегося флюида играет основную роль при движении газа и жидкости в пористых средах.

Данная статья отличается от [9], тем, что здесь рассматривается случай фильтрации, когда сжимаемость скелета много меньше сжимаемости фильтрующейся среды. Такие условия часто реализуются на практике. Примером такого рода является случай фильтрации газа в песчаных или карбонатных коллекторах. Предположение о несжимаемости скелета позволяет считать пористость и проницаемость постоянными.

В отличие от классического линейного подхода, когда в дивергентном слагаемом уравнения неразрывности плотность считается не зависящей от давления, здесь развит способ решения задачи, на основе нелинейного уравнения пьезопроводности, полученного без

ФИЛИППОВ Александр Иванович – д.т.н., Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, ООО «РН-БашНИПИнефть», e-mail: filippovai1949@mail.ru
АХМЕТОВА Оксана Валентиновна – д.ф.-м.н., Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, e-mail: ahoksana@yandex.ru

принятого ранее ограничения. Это позволяет расширить диапазон возмущений давления, в котором обеспечивается достаточная точность вычислений. Решение этой задачи важно для практических приложений, поскольку в настоящее время для увеличения нефте- и газоизвлечения используются высокие перепады давления, которые в предельном случае обеспечивают гидроразрыв пласта.

Вывод уравнения. Рассмотрим случай одномерной горизонтальной фильтрации. Уравнение неразрывности в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial \rho m}{\partial t}+\frac{\partial \rho \upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho \upsilon_z}{\partial z}=0. \qquad (1.1)$$

Необходимость использования двухмерного уравнения неразрывности вызвано тем, что даже при горизонтальной одномерной фильтрации в нелинейной задаче необходим учет зависимости естественного поля давления, обусловленного гравитационным взаимодействием. Ниже показано, что если вектор ускорения свободного падения ортогонален вектору скорости фильтрации, то зависимость нелинейного поля давления от вертикальной координаты *z является параметрической.*

При соответствующем выборе системы координат, когда оси характеристического эллипсоида тензора проницаемости анизотропной среды k_{ij} выбраны совпадающими с осями координат, вектор ускорения свободного падения направлен по оси *z*, а движение жидкости происходит по оси *x*, уравнение движения представляется как ($k_x = k$)

$$\vec{\upsilon}=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i}-\frac{k_z}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\rho g\right)\vec{k}. \qquad (1.2)$$

В пластовых условиях перепады температуры на несколько порядков меньше, чем перепады давлений, что позволяет использовать уравнение состояния баротропной среды $\rho=\rho(P)$. Оценки на основе экспериментальных данных показывают, что это уравнение можно представить с высокой точностью в виде линейной зависимости плотности от перепада давления

$$\rho=\rho_0\left(1+\alpha\left(P-P_l\right)\right), \qquad (1.3)$$

где ρ_0 – плотность фильтрующейся жидкости при давлении линеаризации $P=P_l$.

Уравнения для определения невозмущенного поля давления $\widetilde{P}$ следуют из (1.2), если положить в нем скорость фильтрации равной нулю

$$\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial z}=\rho g\,,\ \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial x}=0\,. \qquad (1.4)$$

Эти уравнения описывают вертикальное распределение давления для невозмущенного поля $\widetilde{P}$ – поля, устанавливающегося в пластовой системе в отсутствии внешних воздействий на нее. Решение уравнений (1.4) методом разделения переменных, можно представить в неявном виде

$$\int_{P_0}^{\widetilde{P}}\frac{dP}{\rho(P)}=gz. \qquad (1.5)$$

Согласно полученной неявной зависимости, давление $\widetilde{P}$ зависит только от *z*. Поскольку, согласно предположению, фильтрация происходит только по оси *x*, то уравнение для начального поля давления (1.4) выполняется и в процессе фильтрации, уравнение неразрывности запишется как

$$\frac{\partial \rho m}{\partial t}+\frac{\partial \rho \upsilon_x}{\partial x}=0. \qquad (1.6)$$

С учетом закона Дарси (1.2), это уравнение представится в нелинейном виде

$$\frac{\partial \rho m}{\partial t}-\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(P)\frac{\partial P}{\partial x}\right)=0. \qquad (1.7)$$

Воспользовавшись выражением для производной от произведения пористости на плотность по времени $\frac{\partial \rho m}{\partial t}=m\frac{d\rho}{dP}\frac{\partial P}{\partial t}=m\rho_0\alpha\frac{\partial P}{\partial t}$, для линейной зависимости плотности от давления получим следующее уравнение для поля давления при линейной одномерной горизонтальной фильтрации

$$m\rho_0\alpha\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\left(1+\alpha\left(P-P_l\right)\right)\frac{\partial P}{\partial x}\right)=0. \qquad (1.8)$$

Заметим, что это нелинейное уравнение не позволяет заменить коэффициент сжимаемости α коэффициентом пьезопроводности, полностью исключив α из уравнения, как это происходит в линейных уравнениях. Причиной этому является зависимость коэффициента $\left(1+\alpha\left(P-P_l\right)\right)$ в последнем слагаемом от давления.

Указанная особенность также приводит к тому, что уравнение для возмущений давления $\Pi=P-\widetilde{P}$, вызванных разработкой месторождения, не позволяет исключить невозмущенное поле давления $\widetilde{P}$ из уравнения, поскольку оно приобретает вид

$$m\rho_0\alpha\frac{\partial \Pi}{\partial t}-\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\left(1+\alpha\left(\Pi+P-P_l\right)\right)\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)=0. \quad (1.9)$$

К уравнениям такого типа, к сожалению, не применимы классические методы, такие как, например, интегральные преобразования.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о поле давления в пористом пласте, который эксплуатируется в режиме заданной депрессии [6, 10–12]. Такая задача является фундаментальной для разработки нефтегазовых месторождений.

Задача включает уравнение для поля давления (1.9), преобразованное к виду

$$\alpha\frac{\partial \Pi}{\partial t}-\frac{k}{\mu m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1+\alpha\left(\Pi+P-P_l\right)\right)\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)=0, \quad (x,t)\in Q, \quad (2.1)$$

где Q представляет декартово произведение лучевой области $D = \{x > 0\}$ и временного интервала $(0, T)$, у которого верхняя граница может принимать сколь угодно большие значения: $Q = D \times (0, T)$.

Предполагается, что в начальный момент времени давление совпадает с невозмущенным

$$P\big|_{t=0}=\widetilde{P}, \text{ или } \Pi\big|_{t=0}=0, \quad (2.2)$$

а на выходе из пористой среды создан в начальный момент времени и поддерживается заданный перепад давления P_w:

$$P\big|_{x=0}=\widetilde{P}+P_w, \text{ или } \Pi\big|_{x=0}=P_w. \quad (2.3)$$

Искомое решение принадлежит классу $\Pi(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}$, почти везде, может быть за исключением одной точки луча, имеет непрерывную вторую производную по x и регулярно в бесконечно удаленных точках луча.

Параметризация. Для решения задачи использован асимптотический метод, при использовании которого важно наличие малого параметра. В качестве такового может быть использована сжимаемость фильтрующейся среды α. Однако в этом случае на указанный параметр, имеющий четкий физический смысл, должны накладываться дополнительные математические требования. Чтобы избежать конфликта требований, добавим в задачу формальный асимптотический параметр как сомножитель перед параметром α. Параметризованная таким образом задача имеет вид

$$\varepsilon\alpha\frac{\partial \Pi}{\partial t}-\frac{k}{\mu m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1+\varepsilon\alpha\left(\Pi+P-P_l\right)\right)\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)=0, \quad (3.1)$$

$$(x,t)\in Q$$

$$\Pi\big|_{t=0}=0, \quad (3.2)$$

$$\Pi\big|_{x=0}=P_w. \quad (3.3)$$

Заметим, что при $\varepsilon = 1$ задача совпадает с исходной.

Нулевое приближение. Решение задачи отыскивается в виде асимптотической формулы

$$\Pi=\Pi^{(0)}+\varepsilon\Pi^{(1)}+\ldots, \quad (4.1)$$

после подстановки которой в (3.1) и перегруппировки по степеням формального параметра, уравнение приобретает вид

$$-\frac{k}{m\mu}\frac{\partial^2\Pi^{(0)}}{\partial x^2}+\varepsilon\left[\alpha\frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial t}-\frac{k}{m\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\left(\Pi^{(0)}+\widetilde{P}-P_l\right)\frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial x}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{k}{m\mu}\frac{\partial^2\Pi^{(1)}}{\partial x^2}\right]+\ldots=0. \quad (4.2)$$

Поэтому задача для нулевого приближения

$$-\frac{k}{m\mu}\frac{\partial^2\Pi^{(0)}}{\partial x^2}=0, \quad (4.3)$$

$$\Pi^{(0)}\big|_{x=0}=P_w, \quad (4.4)$$

$$\Pi^{(0)}\big|_{t=0}=0, \quad (4.5)$$

к которой добавлено условие на бесконечности

$$\lim_{x\to\infty}\Pi^{(0)}=0, \quad (4.6)$$

является квазистационарной.

Из (4.3) следует, что возмущения давления не зависят явно от времени $\partial\Pi^{(0)}/\partial t=0$. Тем не менее, как мы покажем ниже, время входит в полученное решение как параметр.

Для того, чтобы интеграл уравнения (4.2)

$$\Pi^{(0)}=Cx+D \quad (4.7)$$

мог удовлетворять условию на бесконечности (4.5), необходимо ограничить носитель решения $0 < x < L$, т.е. область ненулевых решений, а условие (4.5) представить как

$$\Pi^{(0)}\big|_{x=L}=0. \quad (4.8)$$

Тогда аналитическое решение задачи для нулевого приближения запишется в виде

$$\Pi^{(0)}=\begin{cases}P_w\left(1-\dfrac{x}{L}\right), & 0<x<L,\\ 0, & x>L.\end{cases} \quad (4.9)$$

Полученное решение выполняется в любой момент времени, т.е. выражение (4.9) инвариантно относительно времени. Временная инвариантность означает, что частная производная по времени от нулевого приближения равна нулю: $\partial \Pi^{(0)} / \partial t = 0$. Как известно, модели такого рода являются квазистационарными, а время может входить в получаемые таким образом решения параметрически.

Для того, чтобы решение (4.9) было адаптировано к нестационарному, следует положить зависящей от времени зону отличных от нуля решений $L = L(t)$, благодаря чему время появится в нулевом приближении как параметр. Условие (4.5) может быть выполнено, если положить $L(t = 0) = 0$. Чтобы найти зависимость $L = L(t)$, следует воспользоваться законом сохранения массы фильтрующейся среды.

Общее изменение массы в зоне возмущений составит

$$G = \int_0^L m\left[\rho(P) - \rho\left(\widetilde{P}\right)\right]dx = m\rho_0 \int_0^L \Pi(x)dx . \quad (4.10)$$

Согласно закону сохранения массы, скорость ее изменения равна скорости фильтрации, умноженной на плотность

$$\frac{d}{dt}G = -\rho\left(\widetilde{P} + P_w\right)\frac{k}{\mu}\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=0} . \quad (4.11)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение для определения $L(t)$ запишется как

$$m\alpha \frac{1}{2}\frac{dL}{dt} = \frac{k}{\mu}\frac{1}{L}\left(1 + \alpha\left(\widetilde{P} + P_w - P_l\right)\right), \quad (4.12)$$

при условии $L(t = 0) = 0$ его решение имеет вид

$$L = 2\sqrt{\chi\left(1 + \alpha\left(\widetilde{P} + P_w - P_l\right)\right)t} , \quad (4.13)$$

где $\chi = \dfrac{k}{m\mu\alpha}$.

Отсюда следует, что при $\widetilde{P} + P_w - P_l = 0$ решение нелинейной задачи в нулевом приближении совпадает с решением линейной задачи методом последовательной смены стационарных состояний, полученным И.А. Чарным [13]. Это же условие ограничивает применение метода И.А. Чарного к решению нелинейных задач даже в нулевом приближении, поскольку $\widetilde{P}$ является функцией z.

Выражение (4.9) с учетом (4.13) представляет главную часть искомого поля давления приближенно. Уточнение полученного выражения осуществляется отысканием более высоких членов асимптотического разложения.

Первый коэффициент разложения. Итак, выражения (4.9) и (4.13) являются решением нелинейной задачи в нулевом приближении. Однако для уточнения вклада нелинейности в поле давления следует найти выражение для первого коэффициента разложения. Уравнение для его определения следует из (4.2) при первой степени формального асимптотического параметра

$$\frac{k}{m\mu}\frac{\partial^2 \Pi^{(1)}}{\partial x^2} = \alpha\left[\frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial t} - \frac{k}{m\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\Pi^{(0)} + \tilde{P} - P_l\right)\frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial x}\right)\right],$$

$$(x,t) \in Q . \quad (5.1)$$

Граничные и начальные условия имеют вид

$$\left.\Pi^{(1)}\right|_{x=0} = 0 , \quad (5.2)$$

$$\left.\Pi^{(1)}\right|_{t=0} = 0 , \quad (5.3)$$

$$\lim_{x\to\infty} \Pi^{(1)} = 0 . \quad (5.4)$$

Если учесть, что нулевое приближение не зависит явно от времени

$$\frac{k}{m\mu}\frac{\partial^2 \Pi^{(1)}}{\partial x^2} = -\frac{k\alpha}{m\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\Pi^{(0)} + \widetilde{P} - P_l\right)\frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial x}\right), \quad (5.5)$$

то интегрирование уравнения упрощается. Интеграл уравнения (5.5) имеет вид

$$\Pi^{(1)} = -\alpha\left(\frac{\Pi^{(0)2}}{2} + \left(\widetilde{P} - P_l\right)\Pi^{(0)}\right) + Ax + B . \quad (5.6)$$

Область ненулевых решений ограничена сверху значением L_1: $0 < x < L_1$. Решение в нулевом приближении представим по аналогии с (4.9), заменив L на L_1, как

$$\Pi^{(0)} = \begin{cases} P_w\left(1 - \dfrac{x}{L_1}\right), & 0 < x < L_1, \\ 0, & x > L_1. \end{cases} \quad (5.7)$$

Определив с помощью граничных условий $\left.\Pi^{(1)}\right|_{x=0} = 0$ и $\left.\Pi^{(1)}\right|_{x=L_1} = 0$, которыми заменено условие (5.4), постоянные интегрирования A и B, представим первый коэффициент разложения в виде

$$\Pi^{(1)} = \alpha\left(\frac{P_w^2}{2} + \left(\tilde{P} - P_l\right)P_w\right)\left(1 - \frac{x}{L_1}\right) - \\ -\alpha\left(\frac{\Pi^{(0)2}}{2} + \left(\tilde{P} - P_l\right)\Pi^{(0)}\right). \quad (5.8)$$

Решение в первом приближении равно сумме нулевого и первого коэффициентов асимптотического разложения

$$\Pi = \Pi^{(0)} + \Pi^{(1)} = \Pi^{(0)} +$$
$$+\alpha\left[\left(\frac{P_w^2}{2} + \left(\tilde{P} - P_l\right)P_w\right)\left(1 - \frac{x}{L_1}\right) - \frac{\Pi^{(0)2}}{2} - \left(\tilde{P} - P_l\right)\Pi^{(0)}\right] =$$
$$= \Pi^{(0)} + \frac{\alpha}{2}\left(P_w\Pi^{(0)} - \Pi^{(0)2}\right). \qquad (5.9)$$

Это выражение представляет искомое решение в первом приближении, в котором, как и в случае нулевого коэффициента, зависимость от времени является параметрической и выражается через $L_1(t)$, определенной ниже из закона сохранения массы.

Общее изменение массы в возмущенной зоне определим с помощью выражения (4.10)

$$G = \int_0^{L_1} m\left[\rho(P) - \rho\left(\tilde{P}\right)\right]dx = m\rho_0\int_0^{L_1}\Pi(x)dx\,. \qquad (5.10)$$

В результате интегрирования после подстановки (5.9) получим

$$G = m\rho_0\alpha P_w\left(1 + \alpha\frac{P_w}{6}\right)\frac{L_1}{2}. \qquad (5.11)$$

Поскольку градиент возмущений давления, согласно (5.9), представляется как

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x} = -\frac{P_w}{L_1}\left(1 - \alpha\frac{P_w}{2}\right), \qquad (5.12)$$

то уравнение, соответствующее закону сохранения массы (4.11), имеет вид

$$m\left(1 + \alpha\frac{P_w}{6}\right)\frac{\alpha}{2}L_1\frac{dL_1}{dt} =$$
$$= \frac{k}{\mu}\left(1 - \alpha\frac{P_w}{2}\right)\left(1 + \alpha\left(\tilde{P} + P_w - P_l\right)\right).$$

Решение уравнения, при дополнительном начальном условии $L_1(t=0) = 0$, имеет вид

$$L_1 = 2\sqrt{\chi\frac{1 - \alpha P_w/2}{1 + \alpha P_w/6}\left(1 + \alpha\left(\tilde{P} + P_w - P_l\right)\right)t}\,,$$

где $\chi = \dfrac{k}{m\mu\alpha}$.

Для случая $\alpha P_w << 1$ можно воспользоваться формулами для малых приращений δ и ε: $\sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{1+\delta}} \approx 1 - \dfrac{\varepsilon + \delta}{2}$. В результате получим взаимосвязь между размерами зон возмущения в первом и нулевом приближениях

$$L_1 = 2\left(1 - \alpha\frac{P_w}{3}\right)\sqrt{\chi\left(1 + \alpha\left(\tilde{P} + P_w - P_l\right)\right)t} =$$
$$= \left(1 - \alpha\frac{P_w}{3}\right)L.$$

Итак, из полученного равенства следует, что нелинейный эффект, связанный с учетом зависимости плотности от давления в формуле для массового расхода фильтрующейся среды, заключается в уменьшении размеров зоны возмущений поля давления (или сжатии этой зоны).

Построение более высоких коэффициентов асимптотического разложения осуществляется аналогично найденному аналитическому решению нелинейной задачи о фильтрационном поле давления в нулевом и первом приближениях, удовлетворяющим квазистационарным уравнениям, в которые время входит как параметр через размеры зоны возмущений, определяемые законом сохранения массы.

Справедливость полученного решения подтверждается идентичностью частного случая полученного выражения и классического решения.

Предлагаемый подход снимает ограничения классических методов, связанные с пренебрежением зависимостью плотности флюида от давления в дивергентном члене уравнения неразрывности и тем самым открывает новые возможности исследования высокоамплитудных процессов фильтрации. Использованный метод является новым общим результативным подходом к нелинейным задачам, когда уравнение состояния или зависимость физического параметра от искомой функции представляется в линеаризованном виде и обеспечивает возможности исследования вклада нелинейности вызванной зависимостью других гидродинамических и фильтрационных параметров от давления.

Список обозначений: g – ускорение свободного падения, *м/с²*; k – проницаемость, *м²*; m – пористость скелета пласта; α – сжимаемость фильтрующейся среды, *1/Па*; ε – параметр асимптотического разложения; χ – пьезопроводность, *м²/с*; μ – вязкость фильтрующейся среды, *Па · с*; ρ – плотность фильтрующейся среды, *кг/м³*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда – грант № 22-22-00132

Литература

1. Шитов В.В., Москалев П.В., Чаплин Д.В. О решении частной задачи нелинейной фильтрации в пористом теле // Инженерная физика. 2003. № 4. С. 21–27.
2. Шагапов В.Ш., Дударева О.В. Нелинейные эффекты фильтрации при переходных режимах работы скважины // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 2. С. 285–291.
3. Ахметова О.В., Филиппов А.И., Ковальский А.А., Губайдуллин М.Р. Нестационарное поле давления в слоисто-неоднородной среде при закачке радиоактивных растворов // Инженерная физика. 2017. № 9. С. 3–14.
4. Филиппов А.И., Ковальский А.А., Ахметова О.В. Фильтрационное поле давления при высокоамплитудных возмущениях // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93. № 6. С. 1403–1413.
5. Туманова Е.С. Обоснование параметров нелинейной фильтрации в гидродинамической модели нефтяной залежи с низкопроницаемым коллектором // Нефтепромысловое дело. 2020. № 5(617). С. 20–25.
6. Бадертдинова Е.Р., Хайруллин Р.М. Численное решение обратной задачи нестационарной нелинейной фильтрации в пласте, вскрытом горизонтальной скважиной // Вестник Технологического университета. 2021. Т. 24. № 12. С. 148–151.
7. Филиппов А.И., Зеленова М.А. Взаимосвязь нелинейных математических моделей образования глинистой корки в радиальной и линейной геометрии // Известия Уфимского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 10–16.
8. Хусаинова Г.Я., Хусаинов И.Г. Очистка призабойной зоны пласта с помощью акустических волн // Известия Уфимского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 71–75.
9. Филиппов А.И., Ковальский А.А., Ахметова О.В., Губайдуллин М.Р. Численное моделирование фильтрационных полей давления в изолированном однородном изотропном несовершенно вскрытом пласте // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94. № 1. С. 41–50.
10. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 416 с.
11. Чарный И.А. Подземная гидродинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.
12. Чекалюк Э.Б. Основы пьезометрии залежей нефти и газа. Киев: ГИТЛ УССР, 1965. 286 с.
13. Чарный И.А. Метод последовательной смены стационарных состояний и его приложение к задачам нестационарной фильтрации жидкостей и газов // Известия АН СССР. ОТН. 1949. № 3. С. 323–342.

References

1. Shitov V.V., Moskalev P.V., Chaplin D.V. O reshenii chastnoy zadachi nelineynoy fil'tratsii v poristom tele // Inzhenernaya fizika, 2003, no. 4, pp. 21–27.
2. Shagapov V.Sh., Dudareva O.V. Nelineynye effekty fil'tratsii pri perekhodnykh rezhimakh raboty skvazhiny // Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal, 2016, vol. 89, no. 2, pp. 285–291.
3. Akhmetova O.V., Filippov A.I., Koval'skiy A.A., Gubaydullin M.R. Nestatsionarnoe pole davleniya v sloisto-neodnorodnoy srede pri zakachke radioaktivnykh rastvorov // Inzhenernaya fizika, 2017, no. 9, pp. 3–14.
4. Filippov A.I., Koval'skiy A.A., Akhmetova O.V. Fil'tratsionnoe pole davleniya pri vysoko-amplitudnykh vozmushcheniyakh // Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal, 2020, vol. 93, no. 6, pp. 1403–1413.
5. Tumanova E.S. Obosnovanie parametrov nelineynoy fil'tratsii v gidrodinamicheskoy modeli neftyanoy zalezhi s nizkopronitsaemym kollektorom // Neftepromyslovoe delo, 2020, no. 5(617), pp. 20–25.
6. Badertdinova E.R., Khayrullin R.M. Chislennoe reshenie obratnoy zadachi nestatsionarnoy nelineynoy fil'tratsii v plaste, vskrytom gorizontal'noy skvazhinoy // Vestnik Tekhnologicheskogo universiteta, 2021, vol. 24, no. 12, pp. 148–151.
7. Filippov A.I., Zelenova M.A. Vzaimosvyaz' nelineynykh matematicheskikh modeley obrazovaniya glinistoy korki v radial'noy i lineynoy geometrii // Izvestiya Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN, 2023, no. 4, pp. 10–16.
8. Khusainova G.Ya., Khusainov I.G. Ochistka prizaboynoy zony plasta s pomoshch'yu akusticheskikh voln // Izvestiya Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN, 2023, no. 4, pp. 71–75.
9. Filippov A.I., Koval'skiy A.A., Akhmetova O.V., Gubaydullin M.R. Chislennoe modelirovanie fil'tratsionnykh poley davleniya v izolirovannom odnorodnom izotropnom nesovershenno vskrytom plaste // Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal, 2021, vol. 94, no. 1, pp. 41–50.
10. Basniev K.S., Kochina I.N., Maksimov V.M. Podzemnaya gidromekhanika, Moskva: Nedra, 1993, 416 p.
11. Charnyy I.A. Podzemnaya gidrodinamika, Moskva: Gostoptekhizdat, 1963, 396 p.
12. Chekalyuk E.B. Osnovy p'ezometrii zalezhey nefti i gaza, Kiev: GITL USSR, 1965, 286 p.
13. Charnyy I.A. Metod posledovatel'noy smeny statsionarnykh sostoyaniy i ego prilozhenie k zadacham nestatsionarnoy fil'tratsii zhidkostey i gazov // Izvestiya AN SSSR. OTN, 1949, no. 3, pp. 323–342.

THE PROBLEM OF A NONLINEAR FILTRATION PRESSURE FIELD IN AN ENVIRONMENT WITH A WEAKLY COMPRESSIBLE SKELETON

© A.I. Filippov[1,2], O.V. Akhmetova[1]

[1] Sterlitamak branch of the Ufa University of Science and Technology,
49, Prospekt Lenina, 453103, Sterlitamak, Russian Federation

[2] LLC "RN-BashNIPIneft",
3/1, ulitsa Bekhtereva, 450103, Ufa, Russian Federation

The solution of the problem of the pressure field during filtration of a compressible fluid in a porous medium with an incompressible skeleton in the presence of high-amplitude disturbances is presented. The equation describing pressure changes during field development takes into account the compressibility of the fluid and is presented in a nonlinear form. The known dependences of the density of the filtered medium on the pressure are approximated by a linear function. The movement is assumed to be one-dimensional and horizontal. The porosity, density and permeability of the porous medium skeleton, as well as the viscosity of the filtered medium are considered constant.

The solution of the problem is found using an asymptotic expansion by a formal parameter added in the problem as a factor to the compressibility of the fluid. An approximate analytical solution of the nonlinear problem of the filtration pressure field in the zero and first approximations is found. The zero and first coefficients are represented by solutions of quasi-stationary equations, in which time is included as a parameter through the dimensions of the perturbation zone determined by the law of conservation of mass. It is established that taking into account the nonlinearity leads to a decrease in the size of the zone of disturbances of the pressure field.

An approach to determining the upper boundary of the perturbation zone in nonlinear problems of this kind, which is based on the use of conservation laws, is proposed. It is shown that the special case of the zero approximation coincides with the solution of the linear problem obtained by the method of changing successive stationary states. The expressions found expand the possibilities of studying high-amplitude filtration processes, and the proposed approach removes the limitations of classical approaches associated with neglecting the dependence of fluid density on pressure in the divergent term of the continuity equation. The method used makes it possible to construct analytical expressions for decomposition coefficients orders of magnitude higher than the first, in addition, it creates the possibility of studying the contribution of nonlinearity caused by the dependence of permeability and viscosity on pressure.

Keywords: nonlinear equation, filtration, pressure, asymptotic decomposition.