

УДК 524.882

DOI: 10.31040/2222-8349-2023-0-1-92-96

ПРЕЦЕССИЯ ЛЕНЗЕ-ТИРРИНГА ЧЕРНЫМИ ДЫРАМИ В МОДЕЛИ РЭНДАЛЛА-САНДРАМА

© Г.Ф. Ахтарьянова

Описание нашей Вселенной на бране предполагает существование дополнительного измерения и фундаментальный масштаб гравитации, который может быть на несколько порядков ниже масштаба Планка. Интересным следствием сценария мира на бране является природа сферически-симметричных вакуумных решений уравнений гравитационного поля на бране, которые могут представлять черные дыры со свойствами, совершенно отличными от свойств обычных черных дыр в 4-х измерениях. В работе исследуется прецессия Лензе-Тирринга черными дырами в модели Рэндалла-Сандрама, вызванная эффектом увлечения инерциальных систем отсчета. Прецессия Лензе-Тирринга – это общий релятивистский эффект, возникающий, когда вращающаяся частица смещается вертикально от экваториальной оси вращающегося тела таким образом, что увлечение инерциальной системы отсчета вызывает колебания вокруг эклиптики и перицентра. В модели Рэндалла-Сандрама теории мира на бране предполагается, что наша Вселенная представляет собой доменную стенку с отрицательным натяжением, разделенную от стены положительного натяжения плитой пространства анти-де Ситтера. Пространство-время черной дыры в модели Рэндалла-Сандрама теории «мира на бране» характеризуется индуцированным приливным зарядом. В частности, в работе получено обобщенное выражение для скорости прецессии Лензе-Тирринга в случае сильного и слабого гравитационного поля. Далее рассмотрена прецессия гироскопа в плоскости $\theta = 0$, показана зависимость скорости прецессии Лензе-Тирринга для черной дыры звездной массы и сверхмассивной черной дыры при различных значениях приливного заряда β . Приведены результаты численного моделирования при различных значениях приливного заряда и радиальной координаты.

Ключевые слова: прецессия Лензе-Тирринга, черные дыры, модель Рэндалла-Сандрама.

Введение. Новые результаты космических наблюдений [1] подтвердили существование создаваемого самогравитирующими источниками эффекта увлечения инерциальных систем отсчета. Подобный эффект является одним из самых замечательных эффектов, предсказываемых общей теорией относительности (ОТО) [2]. Термин «увлечение инерциальных систем отсчета» обычно относится к влиянию вращающегося массивного тела на гироскоп за счет создания завихрения в конгруэнтности мировых линий внешних наблюдателей вне вращающегося объекта. С помощью гироскопов можно обнаружить два различных эффекта. Один из них (эффект Фоккера-де-Ситтера) относится к прецессии гироскопа по замкнутой орбите вокруг сферически-симметричного распределения масс. Это было подтверждено с большой точностью при наблюдении за вращением системы Земля-Луна вокруг Солнца [3]. Другим эффектом, который нас интересует в этой работе, является прецессия Лензе-Тирринга, которая относится к появлению

завихренности в конгруэнтности мировых линий наблюдателей в гравитационном поле массивного вращающегося шара.

Черные дыры являются одними из самых интригующих объектов изучения в течение многих лет, как в общей теории относительности, так и в теориях многомерной гравитации. В последнее время, после появления теорий гравитации «мира на бране», интерес к черным дырам получил новый импульс [4–5]. В модели Рэндалла-Сандрама дополнительное измерение делается компактным за счет введения двух бран (одной с положительным и одной с отрицательным натяжением) с включением пространства анти-де Ситтера между ними.

Вращающаяся черная дыра в модели Рэндалла-Сандрама. В работе [6] была получена метрика, схожая с решением Керра-Ньюмана в ОТО, описывающее стационарную и осесимметричную черную дыру с электрическим зарядом:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr - \beta}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{2a(2Mr - \beta)}{\Sigma} \sin^2 \theta dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr - \beta}{\Sigma} a^2 \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (1)$$

где $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + \beta$.

Поскольку метрика асимптотически плоская, то, переходя к режиму дальнего поля, можно интерпретировать параметр M как общую массу черной дыры, а параметр a – как отношение ее углового момента к массе. Однако в данном случае на бране нет электрического заряда, тем не менее, имеющийся параметр β в метрике может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Из асимптотической формы метрики (1) следует, что параметр β , в определенном смысле, играет роль кулоновского заряда. На этом основании и вслед за случаем статической черной дыры на бране [7], его можно рассматривать как носителя отпечатков нелокальных эффектов кулоновского типа из вложенного пространства, то есть как о параметре приливного заряда.

В полной аналогии с решением Керра-Ньюмана в ОТО, метрика (1) обладает двумя основными свойствами: структурой горизонта событий и существованием статической предельной поверхности. Горизонт событий – это нулевая поверхность, определяемая уравнением $\Delta = 0$. Наибольший корень этого уравнения:

$$r_{\text{eh}} = M + \sqrt{M^2 - a^2 - \beta}, \quad (2)$$

описывает положение самого внешнего горизонта событий. Мы видим, что структура горизонта зависит от знака приливного заряда. Горизонт событий существует при условии, что:

$$M^2 \geq a^2 + \beta, \quad (3)$$

где равенство соответствует крайнему горизонту. Ясно, что положительный приливный заряд действует на ослабление гравитационного поля, и структуру горизонта, как и в обычном решении Керра-Ньюмана.

Частота прецессии Лензе-Тирринга. Частота прецессии Лензе-Тирринга в слабом поле, задается в виде [8]:

$$\vec{\Omega}_{LT} = \frac{1}{r^3} [3(\vec{J} \vec{r}) \vec{r} - \vec{J}], \quad (4)$$

где \vec{r} – единичный вектор вдоль направления r .

Рассмотрим наблюдателя, находящегося в состоянии покоя в стационарном пространстве-

времени с временным полем Киллинга K . Наблюдатель движется по интегральной кривой $\gamma(\tau)$. Таким образом, ее 4-скорость может быть записана как:

$$u = (-K^2)^{-\frac{1}{2}} K. \quad (5)$$

Теперь можно выбрать ортонормированную тетраду e_α вдоль γ :

$$L_K e_\alpha = 0, \quad (6)$$

где $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Поскольку e_α – это просто $u = \dot{\gamma}$ (где «точка» обозначает дифференцирование по отношению к τ), u перпендикулярно осям e_1, e_2, e_3 . Также имеется:

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \eta_{\alpha\beta}, \quad (7)$$

где \langle , \rangle – символ скалярного произведения и $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. e_α можно интерпретировать как оси в состоянии покоя. Этот выбор иногда называют «коперниковской» системой отсчета.

Известно, что спин гироскопа прецессирует относительно оси покоя. Изменение спина относительно этой системы принимает вид:

$$T(K, e_i) = \nabla_k e_i - \nabla_i K - [K, e_i] = 0, \quad (8)$$

$$w_{ij} = \langle \nabla u e_i, e_j \rangle, \quad (9)$$

где параметр w_{ij} связан с угловой скоростью Ω^l . Тогда получим:

$$w_{ij} = (-K^2)^{-\frac{1}{2}} \langle e_i, \nabla_k e_j \rangle. \quad (10)$$

Гироскоп прецессирует с угловой скоростью Ω относительно тетрадной системы координат, Ω рассматривается как угловая скорость или скорость прецессии Лензе-Тирринга. Так как $[K, e_i] = L_K e_i = 0$, то из уравнения (10) получаем:

$$\nabla_k e_i = \nabla_i K. \quad (11)$$

Пространственными составляющими скорости прецессии (в выбранной системе координат) являются:

$$\Omega_k = \frac{1}{2} \frac{e_{ijl}}{g_{00} \sqrt{-g}} [g_{0i,j} (g_{00} g_{kl} - g_{0k} g_{0l}) - g_{0i} g_{kl} g_{00,j}]. \quad (12)$$

Векторное поле, соответствующее ковектору прецессии Лензе-Тирринга в (12), может быть выражено как:

$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{e_{ijl}}{g_{00} \sqrt{-g}} [g_{0i,j} \left(\delta_l - \frac{g_{0l}}{g_{00}} \delta_0 \right) - g_{0i} g_{kl} g_{00,j}] \quad (13)$$

и представляет собой точное уравнение скорости прецессии Лензе-Тирринга, применимое к любому произвольному стационарному пространству-времени.

Прецессия Лензе-Тирринга в пространстве-времени вращающейся черной дыры с приливным зарядом. Для пространства-вре-

мени рассматриваемого решения в теории мира на бране остаются постоянными $g_{0i} = g_{0\varphi}$, $i = \varphi$ и $j, l = r, \theta$, подставляя их в уравнение (13), вектор частоты прецессии задается в виде:

$$\Omega_{LT} = \frac{1}{2} \frac{e_{ijl}}{g_{00}\sqrt{-g}} \left[\left(g_{0\varphi,r} - \frac{g_{0\varphi}}{g_{00}} g_{00,r} \right) \delta_\theta - \left(g_{0\varphi,\theta} - \frac{g_{0\varphi}}{g_{00}} g_{00,\theta} \right) \delta_r \right], \quad (14)$$

где различные метрические компоненты могут быть рассчитаны из уравнения (1). Также,

$$\sqrt{-g} = \Sigma \sin\theta. \quad (15)$$

Чтобы численно определить частоту прецессии Лензе-Тирринга в сильном гравитационном поле нужно преобразовать формулу частоты прецессии из координатного базиса в ортонормированный базис Коперника:

$$\Omega_{LT} = \Omega^\theta \delta_\theta + \Omega^r \delta_r, \quad (16)$$

$$\Omega_{LT}^2 = g_{rr}(\Omega^r)^2 + g_{\theta\theta}(\Omega^\theta)^2. \quad (17)$$

Далее, в ортонормированном базисе Коперника, с выбором полярных координат, Ω_{LT} можно записать в виде:

$$\vec{\Omega}_{LT} = \sqrt{g_{rr}} \Omega^r \hat{r} + \sqrt{g_{\theta\theta}} \Omega^\theta \hat{\theta}. \quad (18)$$

Для метрики Рэндалла-Сандрама:

$$\Omega^\theta = - \frac{a [M(\Sigma - 2r^2) - \beta r] \sin\theta}{\Sigma^2 (\Sigma - 2Mr + \beta)}, \quad (19)$$

$$\Omega^r = - \frac{a (2Mr - \beta) \Delta_\beta \cos\theta}{\Sigma^2 (\Sigma - 2Mr + \beta)}. \quad (20)$$

Подставляя значения Ω^θ и Ω^r в уравнение (18), получим выражение для скорости прецессии Лензе-Тирринга в пространстве-времени черной дыры в теории мира на бране:

$$\Omega_{LT} = a [(\beta - 2Mr)^2 (r^2 - 2Mr + a^2 + \beta) \times \cos^2 \theta + \{r(\beta - 2Mr) + a^2 M \cos^2 \theta\}^2 \times \sin^2 \theta]^{1/2} / [(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^3 (r^2 - 2Mr + \beta + a^2 \cos^2 \theta)^2]^{1/2}. \quad (21)$$

Полученное выражение является точным аналитическим выражением для скорости прецессии Лензе-Тирринга в сильном гравитационном поле для пространства-времени Рэндалла-Сандрама в теории мира на бране.

В случае слабого гравитационного поля ($r \gg M$) уравнение скорости сводится к следующему виду:

$$\vec{\Omega}_{LT}(r, \theta) = \frac{J}{r^3} \left[\left(2 - \frac{\beta}{Mr} \right) \cos\theta \hat{r} + \left(1 + \frac{\beta}{Mr} \right) \sin\theta \hat{\theta} \right], \quad (22)$$

где θ – угол между наблюдателем и магнитным полюсом компактного объекта.

Далее рассмотрим скорости прецессии Лензе-Тирринга в сильном и слабом поле в

плоскости $\theta = 0$. Тогда выражения примут следующий вид:

$$\Omega_{LT}^{strong} = \frac{a (2Mr - \beta)}{(r^2 + a^2)^{3/2} \sqrt{r^2 - 2Mr + a^2 + \beta}}, \quad (23)$$

$$\Omega_{LT}^{weak} = \frac{aM}{r^3} \left(2 - \frac{\beta}{Mr} \right). \quad (24)$$

Сравним изменение прецессии в случаях сильного и слабого гравитационного поля при различных значениях параметра β . В качестве центрального гравитирующего объекта рассмотрим черную дыру Лебедь X-1 и сверхмассивную черную дыру Стрелец А*. Для наглядности на графике ось ординат представлена в логарифмической шкале $\log(\Omega_{LT}/\Omega_{LT}^0)$, где $\Omega_{LT}^0 = \frac{aM}{r^3}$.

На рис. 1 и 2 представлены графики зависимости скорости прецессии Лензе-Тирринга в сильном и слабом поле массивных объектов (1 – черная дыра Лебедь X-1: $M_{Cyg} = 2.190 \times 10^6$ см, $a_{Cyg} = 2.080 \times 10^6$ см; 2 – черная дыра Стрелец А*: $M_{Sgr} = 6.216 \times 10^{11}$ см, $a_{Sgr} = 2.735 \times 10^{11}$ см) при значениях $\beta = 0.2M^2$ (а), $1M^2$ (б) в диапазоне от 2 до 50M.

В табл. 1 и 2 представлены численные значения скорости прецессии Лензе-Тирринга в сильном и слабом поле для центральных объектов Лебедь X-1 и Стрелец А* соответственно.

Как видно из рис. 1 и 2 и численного моделирования (табл. 1 и 2), с увеличением значения приливного заряда β скорость прецессии уменьшается как в сильном, так и в слабом поле. Кроме того, как в случае черной дыры звездной массы, так и в случае сверхмассивной черной дыры с увеличением радиальной координаты скорость прецессии Лензе-Тирринга для сильного гравитационного поля уменьшается, а для слабого гравитационного поля увеличивается.

Заключение. В работе была исследована прецессия Лензе-Тирринга для вращающейся черной дыры с приливным зарядом в модели Рэндалла-Сандрама. В физике эту модель так же называют геометрией пятимерного искривленного пространства. Исследовано влияние приливного заряда на частоты прецессии Лензе-Тирринга в слабом и сильном гравитационном поле. Получены точные аналитические выражения для скорости прецессии Лензе-Тирринга в сильном и слабом поле массивных объектов и показано влияние приливного заряда. Наибольшая разница достигается вблизи горизонта событий черной дыры. Было определено, что с увеличением значения заряда уменьшается скорость прецессии Лензе-Тирринга в сильном и слабом гравитационном поле.

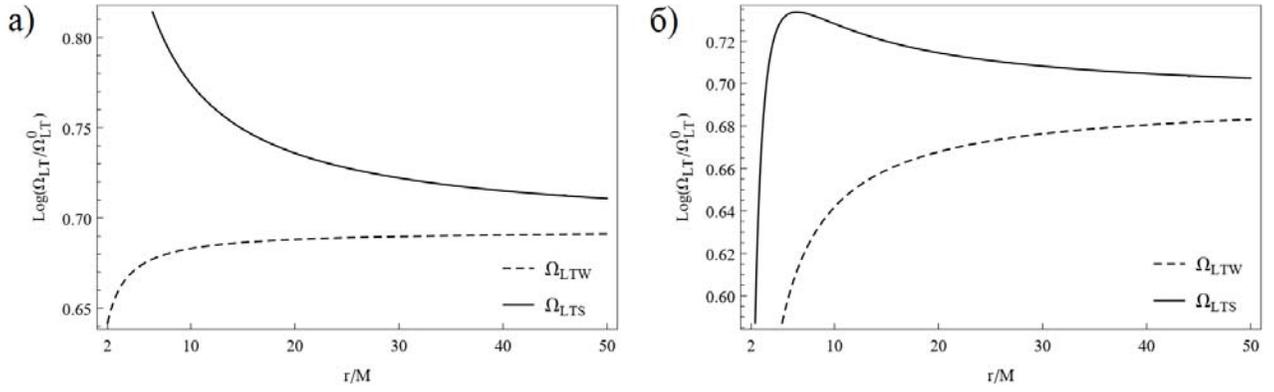


Рис. 1. Зависимость скорости прецессии Лензе-Тирринга в сильном (сплошная линия) и слабом (пунктирная линия) гравитационном поле от радиальной координаты $r \in [2M, 50M]$ для центрального объекта Лебедь X-1 с данными: $M_{Cyg} = 2.190 \times 10^6$ см, $a_{Cyg} = 2.080 \times 10^6$ см при значениях а) $\beta = 0.2M^2$ и б) $\beta = 1M^2$

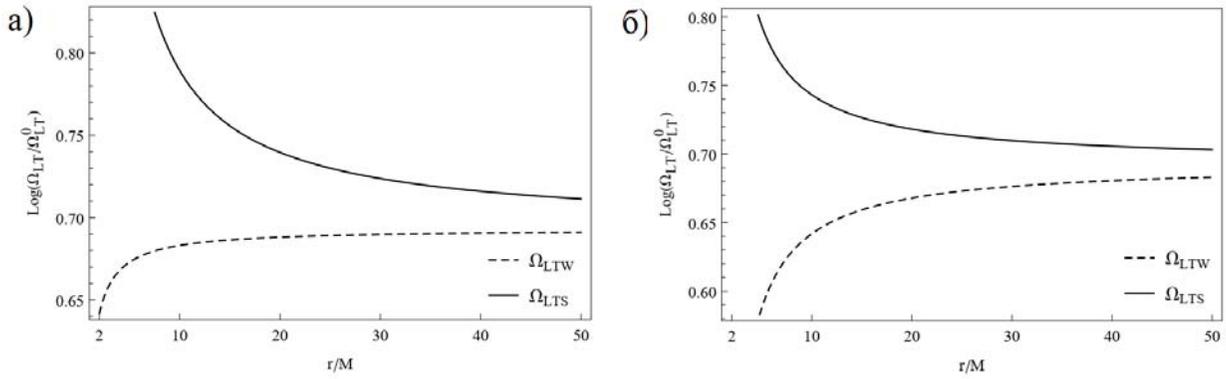


Рис. 2. Зависимость скорости прецессии Лензе-Тирринга в сильном (сплошная линия) и слабом (пунктирная линия) гравитационном поле от радиальной координаты $r \in [2M, 50M]$ для центрального объекта Стрелец А* с данными: $M_{Sgr} = 6.216 \times 10^{11}$ см, $a_{Sgr} = 2.735 \times 10^{11}$ см при значениях а) $\beta = 0.2M^2$ и б) $\beta = 1M^2$

Т а б л и ц а 1

Численное моделирование значений прецессии Лензе-Тирринга для различных значений приливного заряда и радиальной координаты. В качестве центрального гравитирующего объекта рассматривается черная дыра Лебедь X-1 ($M_{Cyg} = 2.190 \times 10^6$ см, $a_{Cyg} = 2.080 \times 10^6$ см)

β	r					
	2M	10M	20M	30M	40M	50M
Ω_{LT}^{strong}						
$0.2M^2$	2.668	2.169	2.087	2.059	2.044	2.035
$0.5M^2$	2.179	2.132	2.071	2.048	2.036	2.029
$1M^2$	1.603	2.071	2.043	2.03	2.023	2.019
Ω_{LT}^{weak}						
$0.2M^2$	1.900	1.980	1.990	1.993	1.995	1.996
$0.5M^2$	1.750	1.950	1.975	1.983	1.988	1.990
$1M^2$	1.500	1.900	1.950	1.967	1.975	1.980

Численное моделирование значений прецессии Лензе-Тирринга для различных значений приливного заряда и радиальной координаты. В качестве центрального гравитирующего объекта рассматривается черная дыра Стрелец A^* ($M_{Sgr} = 6.216 \times 10^{11}$ см, $a_{Sgr} = 2.735 \times 10^{11}$ см)

β	r					
	2M	10M	20M	30M	40M	50M
Ω_{LT}^{strong}						
$0.2M^2$	5.642	2.202	2.095	2.062	2.046	2.037
$0.5M^2$	3.915	2.164	2.078	2.051	2.038	2.031
$1M^2$	2.558	2.102	2.051	2.033	2.025	2.020
Ω_{LT}^{weak}						
$0.2M^2$	1.900	1.980	1.990	1.993	1.995	1.996
$0.5M^2$	1.750	1.950	1.975	1.983	1.988	1.990
$1M^2$	1.500	1.900	1.950	1.967	1.975	1.980

Литература

1. Everitt C.W.F. et al. Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. P. 221101.
2. Debono I., Smoot G.F. General Relativity and Cosmology: Unsolved Questions and Future Directions // Universe. 2016. V. 2. P. 23.
3. Shapiro I.I., Reasenberg R.D., Chandler J.F., Babcock R.W. Measurement of the de Sitter precession of the Moon: A relativistic three-body effect // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 61. P. 2643.
4. Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter // Phys. Lett. B. 1998. V. 429. P. 263–272.

5. Ghosh M. et al. Models comparison in the dark matter problem // Bulletin of Chelyabinsk State University. 2015. № 7(362). P. 7–10.
6. Aliev A.N., Gumrukcuoglu A.E. Charged rotating black holes on a 3-brane // Phys. Rev. D. 2005. V. 71. P. 104027.
7. Sakaguchi M., Yasui Yu. Notes on Five-dimensional Kerr Black Holes // Int. J. Mod. Phys. A. 2006. V. 21. P. 2331–2352.
8. Chakraborty C., Pradhan P.P. Behavior of a test gyroscope moving towards a rotating traversable wormhole // J. Cosm. Astropart. Phys. 2017. V. 03. P. 035.

LENSE-THIRRING PRECESSION BY BLACK HOLES IN THE RANDALL-SANDRUM MODEL

© G.F. Akhtaryanova

Akmullah Bashkir State Pedagogical University,
3a, ulitsa Oktyabrskoy revolyutsii, 450008, Ufa, Russian Federation

The description of our universe on a brane suggests a large extra dimension and a fundamental scale of gravity, which can be several orders of magnitude lower than the Planck scale. An interesting consequence of the brane world scenario is the nature of spherically symmetric vacuum solutions of the brane gravitational field equations, which can represent black holes with properties quite different from those of ordinary black holes in 4 dimensions. The paper investigates the Lense-Thirring precession by black holes in the Randall-Sandrum model caused by the frame-dragging effect. Lense-Thirring precession is a general relativistic effect that occurs when a rotating particle is displaced vertically from the equatorial axis of a rotating body in such a way that the frame-dragging causes oscillations around the ecliptic and periapsis. The Randall-Sandrum model assumes that our universe is a negative tension domain wall separated from the positive tension wall by an anti-de Sitter space slab. The space-time of a black hole in the Randall-Sandrum model of the "brane world" theory is characterized by an induced tidal charge. In particular, a generalized expression for the Lense-Thirring precession rate in the case of a strong and weak gravitational field is obtained. Further, the precession of the gyroscope in the plane $\theta=0$ is considered, the dependence of the Lense-Thirring precession rate for a stellar-mass black hole and a supermassive black hole is shown for different values of the tidal charge β . The results of numerical simulation are presented for various values of the tidal charge and the radial coordinate.

Keywords: Lense-Thirring precession, black holes, Randall-Sandrum model.