

УДК 524.82

DOI: 10.31040/2222-8349-2023-0-1-86-91

**СИЛЬНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ЛИНЗИРОВАНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ РЕГУЛЯРНЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР БЕЗ ГОРИЗОНТА**

© Д.-Л.З. Гесс, Д.И. Ганиева

Гравитационное линзирование часто становится одним из способов экспериментальной проверки той или иной теории гравитации, поскольку позволяет провести наглядное сравнение теоретических предсказаний с данными наблюдений. Чем массивнее компактный объект, тем сильнее проявляются видимые эффекты – по этой причине весьма перспективным представляется изучение сильного гравитационного линзирования такими источниками, как сверхмассивные черные дыры. Целью данной работы является изучение гравитационного линзирования для случая сферически симметричных регулярных заряженных черных дыр с  $0 < b \leq b_E$  и сравнение полученных параметров с рассчитанными для пространства-времени без горизонта ( $b > b_E$ ). Здесь  $b$  – дополнительный параметр, описывающий заряд, и его значение  $b = b_E = 0.226$  соответствует граничному случаю, когда горизонт исчезает. Помимо этого, на примере массивных объектов Phe A\* и M104\*, а также эллиптических галактик NGC57 и NGC163 мы сравним наблюдаемые характеристики регулярных заряженных и обычных шварцшильдовских черных дыр: угловое положение асимптотических релятивистских изображений, угловое расстояние между ними и рассчитанными для тех же  $b$  наиболее удаленными от центра изображениями, а также увеличение наиболее удаленных изображений. Полученные результаты в дальнейшем можно сравнить с данными наблюдений, что позволит сделать вывод о применимости использованного подхода в рамках рассматриваемой теории.

Ключевые слова: сверхмассивные черные дыры, сильное гравитационное линзирование, прицельный параметр.

Явление гравитационного линзирования, заключающееся в искривлении световых лучей, проходящих вблизи массивных объектов, было предсказано общей теорией относительности и стало одним из ее блестящих подтверждений. В настоящее время особый интерес представляют компактные массивные объекты – например, черные дыры, позволяющие исследовать эффекты линзирования в сильных гравитационных полях. В частности, в работе [1] и в других работах этого коллектива авторов был подробно разработан математический аппарат, благодаря которому можно рассчитать ряд важных параметров, включая угол отклонения световых лучей в зависимости от гравитирующей массы. Указанный подход был исчерпывающе описан для произвольных статических сферически-симметричных метрик, а также успешно применен к черным дырам Райснера–Нордстрема. В ряде работ внимание уделено голой сингулярности или случаю пространства-времени без горизонта [2].

Нашей целью является изучение гравитационного линзирования для случая сферически симметричных регулярных заряженных черных дыр с  $0 < b \leq b_E$ , свойства которых детально описаны в [3], а позднее в [8] в применении к расчету энергии статической сферически симметричной черной дыры, и сравнение полученных параметров с рассчитанными для пространства-времени без горизонта ( $b > b_E$ ). Здесь  $b$  – дополнительный параметр, описывающий заряд, и его значение  $b = b_E = 0.226$  соответствует граничному случаю, когда горизонт исчезает. Помимо этого, на примере массивных объектов Phe A\* и M104\*, а также эллиптических галактик NGC57 и NGC163 мы сравним наблюдаемые характеристики регулярных заряженных и обычных шварцшильдовских черных дыр.

Запишем действие в виде:

$$S = \frac{1}{16} \pi \int d^4 x \sqrt{-g} (R - L(F)), F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

где  $R$  – скаляр Риччи,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , и в пределе слабого поля лагранжиан должен

ГЕСС Даля-Лира Зиевна – к.ф.-м.н., Башкирский государственный университет им. М. Акмуллы, e-mail: dahlia.hess@gmail.com

ГАНИЕВА Диана Ильдаровна, Башкирский государственный университет им. М. Акмуллы, e-mail: dianka\_diana1998@mail.ru

удовлетворять условию  $L \rightarrow F, L_F \rightarrow 1$ . Полевые уравнения принимают вид:

$$G_{\nu}^{\mu} = -T_{\nu}^{\mu} = 2L_F F_{\nu\alpha} F^{\mu\alpha} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} L.$$

Рассмотрим соответствующую стандартную сферически симметричную метрику

$$ds^2 = A(r)dt^2 - \frac{dr^2}{B(r)} - r^2 d\Omega, \quad (1)$$

где

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \quad (2)$$

$$M(r) = \frac{1}{2} \int_0^r p(x)x^2 dx$$

и  $d\Omega^2$  есть элементы длины на поверхности сферы. В интересующем нас решении плотность и давление задаются выражениями:

$$p(r) = \frac{q^2}{(r^2+g^2)^2}; p_1 = \frac{q^2(r^2-g^2)}{(r^2+g^2)^3}; g = \frac{\pi q^2}{8m}, \quad (3)$$

где  $g$  – характерное расстояние в нелинейной электродинамике. Лагранжиан и его производная равны

$$\mathcal{L} = \frac{2q^2(g^2-r^2)}{(r^2+g^2)^3}; \quad \mathcal{L}_F = \frac{(r^2+g^2)^3}{r^6}. \quad (4)$$

Интегрируя полевые уравнения с учетом значения плотности (3), получаем решение

$$A(r) = 1/B(r) = \quad (5)$$

$$1 - \frac{4m}{\pi r} \left[ \arctan\left(\frac{r}{g}\right) - \frac{rg}{r^2+g^2} \right],$$

где  $m$  – масса черной дыры, и параметр  $g$  приобретает смысл константы связи.

Перепишем (5), заменив в этом выражении  $r, q$  и  $t$ :

$$A(x) = \frac{1}{B(x)} = 1 - \frac{2}{\pi x} \left[ \arctan\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{xb}{x^2+b^2} \right], \quad (6)$$

где  $b = g/2m$ ,  $x = r/2m$  и  $t = t/2m$ .  $A(x) = 0$  соответствует критическому значению  $b_E \approx 0.226$ , этому случаю отвечает экстремальная заряженная черная дыра (см. рис 1). Для  $b > b_E$  положительных корней уравнения  $A(x) = 0$  нет, а для  $b < b_E$  существует два различных положительных корня, описывающих обыкновенную (не экстремальную) черную дыру и регулярно заряженную черную дыру без горизонта. Во втором случае фотонная сфера может существовать при  $b_E < b \leq b_p \approx 0.247$ .

Для нулевой геодезической линии

$$\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 \equiv x^2 = \varepsilon^2 - \frac{\mathcal{L}^2 A(x)}{C(x)}, \quad (7)$$

где энергия и угловой момент даются выражениями  $\mathcal{E} = -p_{\mu} \xi_{(t)}^{\mu}$  и  $\mathcal{L} = p_{\mu} \xi_{(\varphi)}^{\mu}$ , где  $\xi_{(t)}^{\mu}$  и  $\xi_{(\varphi)}^{\mu}$  –

векторы Киллинга, определяющие инвариантность относительно переноса во времени и пространственного поворота. Радиус фотонной сферы (см. рис. 2) определяется как наибольший корень уравнения

$$\frac{C'(x)}{C(x)} = \frac{A'(x)}{A(x_0)}, \quad (8)$$

На наикратчайшем расстоянии  $x_0$ ,  $x'|_{x=x_0} = 0$  или  $V_{eff}(x_0) = 0$ , откуда

$$u \equiv \frac{\mathcal{L}}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{C(x_0)}{A(x_0)}}. \quad (9)$$

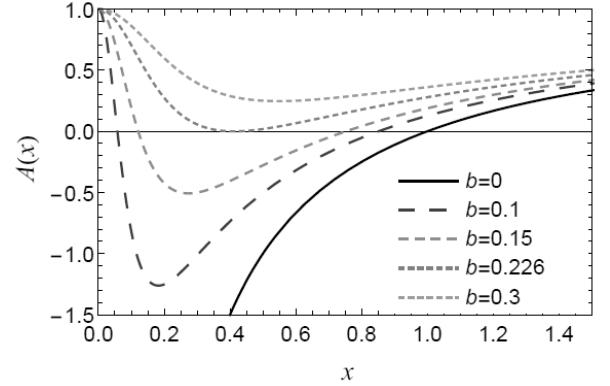


Рис. 1. График функции, заданной уравнением (6), из которого следует, что при  $0 < b \leq b_E$  наблюдается случай черной дыры с двумя горизонтами, тогда как при  $b > b_E$  имеем пространство-время без горизонта. Значение  $b = 0$  соответствует шварцшильдовской черной дыре

Эффективный потенциал определяется из (7) как

$$\frac{V_{eff}}{\varepsilon^2} = \frac{u^2}{x^2} \left[ 1 - \frac{2}{\pi x} \left( \arctan\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{xb}{x^2+b^2} \right) \right] - 1. \quad (10)$$

Световой луч может существовать в области, где  $V_{eff} \leq 0$  (см. рис. 3). Таким образом, можно выделить нестабильные круговые орбиты с  $V_{eff} = V'_{eff}(x) = 0$  и  $V''_{eff}(x_{ps}) < 0$  и стабильные ( $V''_{eff}(x_{ps}) > 0$ ). Пространству времени регулярной заряженной черной дыры отвечает первый случай (рис. 3).

Угол, на который отклоняется световой луч, проходя вблизи черной дыры, стремится к наибольшему значению при  $x_0 = x_{ps}$ . Интересующие нас конечные значения определяются условием  $x_0 > x_{ps}$ . Критическим значением будет значение прицельного параметра  $u_{px}$ , определяемого как

$$u_{px} = \sqrt{\frac{C(x_{ps})}{A(x_{ps})}}, \quad (11)$$

При таком значении фотон приближается к черной дыре на минимально возможное расстояние  $x_0 = x_{ps}$ , а затем переходит на неста-

бильную круговую орбиту радиуса  $x_{ps}$ . Фотоны с  $u < u_{ps}$  попадают в черную дыру, а с  $u > u_{ps}$  сближаются с ней на минимальное расстояние, затем симметрично рассеиваясь в обратном направлении.

Определим угол отклонения как функцию расстояния наибольшего приближения  $x_0$  для метрики (1):

$$\alpha_D(x_0) = I(x_0) - \pi = 2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{\sqrt{B(x)} dx}{\sqrt{C(x)} \sqrt{\frac{C(x)A(x_0)}{C(x_0)A(x)} - 1}} - \pi. \quad (12)$$

Вводя новую переменную  $z = 1 - x_0/x$  [4] и принимая во внимание соотношение между  $u$  и  $x_0$ , перепишем (12) в виде

$$\alpha_D(u) = -\bar{\alpha} \log\left(\frac{u}{u_{ps}} - 1\right) + \bar{b} + O(u - u_{ps}), \quad (13)$$

где  $u = \theta D_{OL}$ ;  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{b}$  – параметры линзы. Графически это можно представить на рис. 4.

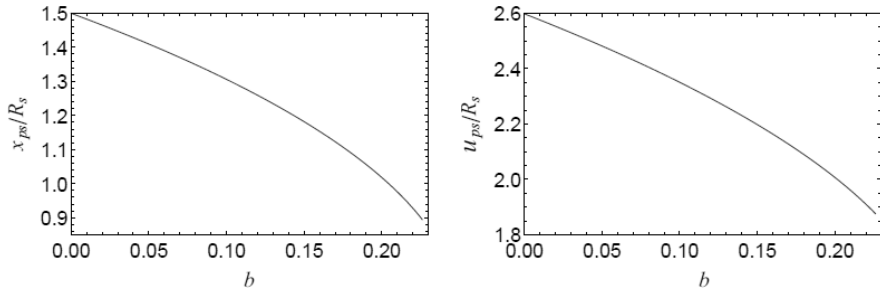


Рис. 2. Радиус фотонной сферы (слева) и критический прицельный параметр (справа) как функции параметра  $b$  для регулярной заряженной черной дыры

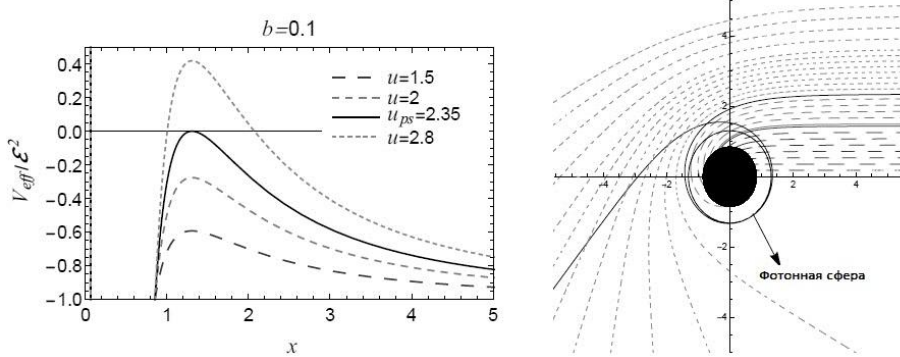


Рис. 3. Эффективный потенциал  $V_{eff}$  для регулярной заряженной черной дыры как функция радиальной координаты  $x$  (слева). Сплошная линия соответствует фотонам со значением прицельного параметра, равным критическому, занимающим нестабильные круговые орбиты. Справа – траектории фотонов со значениями  $u$ , равными указанным на левом рисунке или близкими к ним

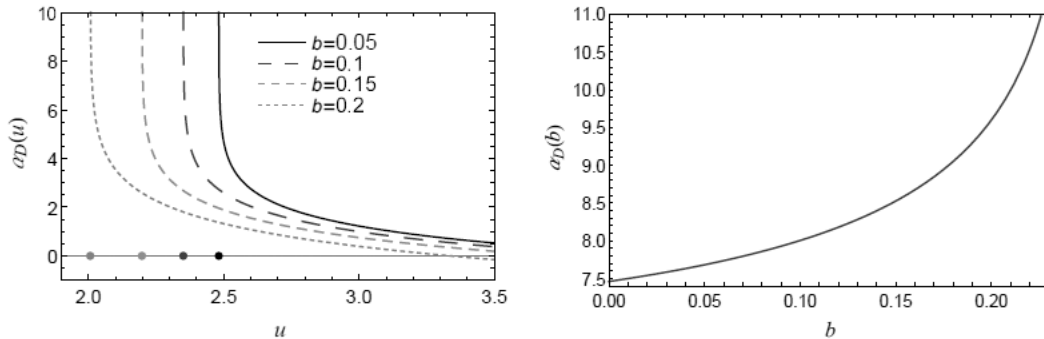


Рис. 4. Зависимость угла отклонения световых лучей для пространства-времени регулярной заряженной черной дыры от параметра  $u$  при четырех фиксированных значениях параметра  $b$  (слева) и зависимость угла отклонения световых лучей как функция параметра  $b$  при  $u = u_{ps} + 0.001$  (справа)

Таблица 1

Значения параметров линзы  $\bar{b}$  и  $\bar{a}$ , а также критического прицельного параметра  $u_{ps}/R_s$  для пространства-времени регулярной заряженной черной дыры. Значения для  $b = 0$  соответствуют случаю шварцшильдовской черной дыры

$b$	$\bar{b}$	$\bar{a}$	$u_{ps}/R_s$
0	1.0000	-0.4002	2.5981
0.05	1.0335	-0.3961	2.4818
0.1	1.0825	-0.3989	2.3507
0.15	1.1629	-0.4235	2.1978
0.2	1.3345	-0.5517	2.0069
0.22	1.4939	-0.7584	1.9099

Таблица 2

Сравнение наблюдаемых параметров объектов-изображений, полученных при помощи гравитационного линзирования черными дырами Phe A\* и M104\*, а также эллиптическими галактиками NGC57 и NGC163. Случай  $b = 0$  соответствует пространству-времени Шварцшильда

$b$	Phe A*		M104*		NGC57		NGC163		$r_{mag}$
	$\theta_\infty(\mu\text{as})$	$s(\mu\text{as})$	$\theta_\infty(\mu\text{as})$	$s(\mu\text{as})$	$\theta_\infty(\mu\text{as})$	$s(\mu\text{as})$	$\theta_\infty(\mu\text{as})$	$s(\mu\text{as})$	
0	24.6228	0.0248	18.3378	0.0162	12.7427	0.0105	6.8932	0.0063	5.8128
0.05	23.4737	0.0304	17.2842	0.0198	12.5003	0.0126	6.1032	0.0097	5.0632
0.1	21.9403	0.0466	16.2277	0.0236	12.0839	0.0223	5.5932	0.0144	4.3212
0.15	20.7318	0.0631	15.1790	0.0347	11.8422	0.0278	4.7208	0.0235	3.9834
0.2	18.2673	0.0988	14.1183	0.0501	11.0297	0.0339	3.9128	0.0296	3.2253
0.22	17.4334	0.1372	13.0311	0.0696	10.6473	0.0514	3.0441	0.0371	2.7830

Следует обобщить эти результаты и отметить, что для любой заданной метрики задача сводится к выполнению следующего алгоритма [6]: решение уравнения (8), затем определение величин

$$\beta_m = \beta_{x_0=x_m} = \frac{c_m(1-y_m)^2(c_m''y_m - c_m A''(x_m))}{2y_m^2 c_m'^2},$$

$$R(z, x_0) = \frac{2\sqrt{By}}{CA'}(1-y_0)\sqrt{C_0},$$

и, наконец, вычисление параметров линзы по формулам

$$\alpha(\theta) = -\bar{a} \log\left(\frac{\theta D_{OL}}{u_m} - 1\right) + \bar{b},$$

$$\bar{a} = \frac{a}{2} = \frac{R(0, x_m)}{2\sqrt{\beta_m}},$$

$$\bar{b} = -\pi + b_R + \bar{a} \log \frac{2\beta_m}{y_m}.$$

Данные расчетов представлены в табл. 1. Угол отклонения для регулярной заряженной черной дыры монотонно убывает с ростом  $u$ , при этом устремляясь к бесконечности при  $u \rightarrow u_{ps}$ . Отметим, что в общем случае с ростом  $b$  угол отклонения убывает, однако при значении предельного параметра, близком к критическому (см. рис. 4) он, напротив, возрастает. При  $x_0 \approx x_{ps}$

ведущим становится слагаемое с  $z^{-1}$ , поэтому интеграл расходится по логарифмическому закону. С ростом  $b$  коэффициент  $\bar{a}$  растет,  $\bar{b}$  убывает. Значения  $\bar{a} = 1$  и  $\bar{b} = -0.4002$  соответствуют случаю шварцшильдовской черной дыры [6]. В других столбцах представлены значения параметров линзы  $\bar{b}$  и  $\bar{a}$ , а также критического прицельного параметра  $u_{ps}/R_s$  для пространства-времени регулярной заряженной черной дыры.

Предположим, что и источник, и наблюдатель расположены на большом расстоянии от линзы (черной дыры) и находятся на одной линии. Уравнение линзы в асимптотически плоском случае имеет вид:

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \Delta \alpha_n, \quad (14)$$

где  $\Delta \alpha_n = \alpha - 2\pi n$ ,  $n$  – целое число. Здесь  $\beta$  – угловое расстояние до источника, а  $\theta$  – угловое расстояние до его изображения, а расстояния от наблюдателя до линзы и от наблюдателя до источника обозначены соответственно как  $D_{OL}$  и  $D_{OS}$ . Используя (13) и (14), найдем положение  $n$ -го изображения:

$$n = \frac{0}{n} + \frac{u_{ps}e_n(\beta - \theta_n^0)D_{os}}{\bar{a}D_{LS}D_{OL}}, \quad (15)$$

где

$$e_n = \exp\left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}} - \frac{2n\pi}{\bar{a}}\right), \quad (16)$$

$\frac{0}{n}$  – положение изображения, соответствующее углу  $\alpha = 2n\pi$ .

Затем,  $n$ -е изображение будет иметь увеличение [5]:

$$\mu_n = \left(-\frac{d\beta}{d\theta}\right)^{-1} \Big|_{\theta_n^0} = \frac{u_{ps}^2 e_n (1 + e_n) D_{os}}{\bar{a}\beta D_{LS} D_{OL}^2}. \quad (17)$$

Первое из изображений будет наиболее ярким, а затем для каждого последующего изображения яркость будет экспоненциально убывать. Поскольку согласно (17) увеличение пропорционально  $1/D_{OL}^2$ , яркость объектов изображений будет существенной только для очень маленьких значений  $\beta$ , т.е. когда источник, линза и изображение практически лежат на одной прямой.

С учетом выражений (13) и (14) рассчитаем следующие величины, доступные для прямых наблюдений: угловое положение асимптотических релятивистских изображений  $\theta_\infty$ , угловое расстояние между ними и рассчитанными для тех же  $b$  наиболее удаленными от центра изображениями  $S$ , а также увеличение наиболее удаленных изображений  $r_{mag}$ . Для этого воспользуемся формулами:

$$\theta_\infty = \frac{u_{ps}}{D_{OL}}, \quad (18)$$

$$s = \theta_1 - \theta_\infty = \theta_\infty \exp\left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}} - \frac{2\pi}{\bar{a}}\right), \quad (19)$$

$$r_{mag} = \frac{5\pi}{\bar{a} \log(10)}. \quad (20)$$

Данные расчетов приведены в табл. 2. Как и ранее, случай  $b = 0$  соответствует пространству-времени Шварцшильда. В качестве гравитационных линз выступают черные дыры Phe A\* и M104\*, а также эллиптические галактики NGC57 и NGC163. Коэффициенты  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ , а

также критический прицельный параметр  $u_{ps}$  можно рассчитать, зная значения  $s$ ,  $r_{mag}$  и  $\theta_\infty$ .

Полученные в рамках данной теоретической модели результаты могут быть сравнены с результатами наблюдений, что позволит оценить точность использованного нами приближения и сделать вывод о ряде характерных особенностей регулярных заряженных черных дыр. Кроме того, помимо гравитационного линзирования могут быть использованы и другие эффекты, такие, как гравитационная задержка времени, что было недавно показано в работе [7]. Большой интерес представляет и более детальное сравнение теоретических данных с уточненными наблюдательными, которое станет возможным в ближайшее время.

### Литература

1. Bozza V., Capozziello S. et al. Strong Field Limit of Black Hole Gravitational Lensing // *General Relativity and Gravitation*. 2001. V. 33. P. 1535–1548.
2. Gylchev G., Yazadjiev S. Gravitational Lensing by Rotating Naked Singularities in the Equatorial Plane // *AIP Conference Proceedings*. 2007. V. 946. P. 1021–1029.
3. Dymnikova I. Regular electrically charged vacuum structures with de Sitter centre in nonlinear electrodynamics coupled to general relativity // *Classical and Quantum Gravity*. 2003. V. 21. № 18.
4. Kumar R., Kumar A., Sushant G. Testing Rotating Regular Metrics as Candidates for Astrophysical Black Holes // *The Astrophysical Journal*. 2020. V. 896. № 1.
5. Virbhadra K.S., Ellis G. Schwarzschild black hole lensing // *Phys. Rev. D*. 2000. V. 62. Iss. 8.
6. Bozza V. Gravitational lensing in the strong field limit // *Phys. Rev. D*. 2002. V. 66. Iss. 10.
7. Kumar J., Islam S., Ghosh S.G. Testing Strong Gravitational Lensing Effects of Supermassive Compact Objects with Regular Spacetimes // *The Astrophysical Journal*. 2022. V. 938. № 2.
8. Yang I., Radinschi I. Energy associated with a static spherically symmetric nonsingular black hole // *Chin. J. Phys.* 2004. V. 326. № 41.



## **STRONG GRAVITATIONAL LENSING FOR THE CASE OF NO HORIZON REGULAR CHARGED BLACK HOLES**

© **D.-L.Z. Gess, D.I. Ganieva**

Akmulla Bashkir State Pedagogical University,  
3-a, Oktyabrskoy revolucii st, 450008, Ufa, Russian Federation

Gravitational lensing often becomes one of the ways to experimentally test a particular theory of gravity, since it allows a visual comparison of theoretical predictions with observational data. The more massive the compact object, the stronger the visible effects are; for this reason, it seems very promising to study strong gravitational lensing by sources such as supermassive black holes. The aim of this paper is to study gravitational lensing for the case of spherically symmetric regular charged black holes with  $0 < b \leq b_E$  and compare the obtained parameters with those calculated for spacetime without a horizon ( $b > b_E$ ). Here  $b$  is an additional parameter describing the charge, and its value  $b = b_E = 0.226$  corresponds to the boundary case when the horizon disappears. In addition, using the massive objects Phe A\* and M104\* as an example, as well as the elliptical galaxies NGC57 and NGC163, we will compare the observed characteristics of regular charged and ordinary Schwarzschild black holes: the angular position of the asymptotic relativistic images, the angular distance between them and those calculated for the same  $b$  most images that are farthest from the center, as well as zooming in on the farthest images. The results obtained can later be compared with observational data, which will allow us to conclude that the approach used is applicable within the framework of the theory under consideration.

Keywords: supermassive black holes, strong gravitational lensing, impact parameter.