

УДК 519.6

DOI: 10.31040/2222-8349-2023-0-4-5-9

**НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ, ЗАДАННЫХ НА КОМПАКТНОМ ГРАФЕ**

© С.Н. Какушкин

Рассматривается обоснование численного метода нахождения собственных функций возмущенных самосопряженных операторов, заданных в сепарабельном гильбертовом пространстве. Метод адаптирован для задач, заданных на конечных связанных ориентированных графах, с произвольным количеством ребер и вершин.

В основе неитерационного численного метода лежат простые формулы, использующие информацию о спектральных характеристиках невозмущенного оператора и его возмущающем операторе. Аппроксимации возмущенного оператора матрицей не требуется. В качестве примера разработанная методика применяется к возмущенной спектральной задаче, заданной на трехреберном графе типа «звезда». Приведены результаты вычислительного эксперимента, проведенного с помощью пакета программ, написанного в математической среде Maple.

Ключевые слова: собственные функции, возмущенные операторы, гильбертово пространство, компактные графы.

**Описание метода.** Рассмотрим конечный связанный ориентированный компактный граф  $G = (V, E)$  с множеством вершин  $V = \{V_i\}_{i=1}^{j_0}$  и множеством ребер  $E = \{E_j\}_{j=1}^{j_0}$  длиной  $l_j > 0$  и площадью поперечного сечения  $d_j > 0$ ,  $i_0, j_0 \in \mathbb{N}$ . Пусть на ребрах  $E$  графа  $G$  задан оператор  $L = \{T_j + P_j\}_{j=1}^{j_0}$ , действующий в гильбертовом пространстве  $H = \{g = (g_1, \dots, g_{j_0}), g_j \in L_2[0, l_j], j = \overline{1, j_0}\}$ , со скалярным произведением  $(g, h) = \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx$ ,  $g, h \in H$ . Здесь  $T = \{T_j\}_{j=1}^{j_0}$  – набор дискретных полуограниченных снизу, а  $P = \{P_j\}_{j=1}^{j_0}$  – набор ограниченных операторов, действующих в  $H$ . На графе  $G$  рассмотрим краевую задачу

$$(T_j + P_j)u_j^{(n_0)} = \mu_{n_0} u_j^{(n_0)}, \quad j = \overline{1, j_0}, \quad \forall n_0 \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

$$\sum_{E_k \in E^\alpha(V_s)} d_k \left. \frac{du_k^{(n_0)}}{dx_k} \right|_{x_k=0} - \sum_{E_m \in E^\omega(V_s)} d_m \left. \frac{du_m^{(n_0)}}{dx_m} \right|_{x_m=l_m} = 0, \quad (2)$$

$$u_i^{(n_0)}(0) = u_k^{(n_0)}(0) = u_m^{(n_0)}(l_m) = u_h^{(n_0)}(l_h), \quad (3)$$

$$E_i, E_k \in E^\alpha(V_s), \quad E_m, E_h \in E^\omega(V_s), \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

Через  $E^\alpha(V_s)$  обозначено множество дуг с началом в вершине  $V_s$ , а через  $E^\omega(V_s)$  – множество дуг с концом в вершине  $V_s$ . Условия (2) означают, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а (3) – что решение  $u^{(n_0)} = (u_1^{(n_0)}(x_1), \dots, u_{j_0}^{(n_0)}(x_{j_0})) \in H$  непрерывно в каждой вершине.

Выберем в пространстве  $H$  полную линейно независимую систему  $\{v^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ . Рассмотрим линейную оболочку первых  $n$  элементов  $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ , образующую векторное подпространство  $H_n$  в пространстве  $H$ .

Приближенное решение задачи (1)–(3) будем искать в виде:

$$\tilde{u}^{(n_0)} = \sum_{k=1}^n a_k v^{(k)}, \quad n_0 \leq n. \quad (4)$$

Здесь  $a_k$  – неизвестные пока числовые коэффициенты, а вектор-функции  $v^{(k)} = (v_1^{(k)}(x_1), \dots, v_{j_0}^{(k)}(x_{j_0})) \in H_n$ ,  $k = \overline{1, n}$ , образуют счетный базис в пространстве  $H$ . Подробнее о сходимости приближенного решения (4) к точному можно найти, например, в [1]. Везде по тексту через  $n$  будем обозначать количество слагаемых, входящих в (4), приближающих решение задачи (1) – (3).

В качестве набора вектор-функций  $\{v^{(k)}\}_{k=1}^n$  будем использовать решения уравнений  $T_j v_j^{(k)} = \lambda_k v_j^{(k)}$ ,  $j = \overline{1, j_0}$ , с условиями, аналогичными условиям (2) и (3). Можно показать, что эти решения соответствуют требованиям выбора базисных вектор-функций, входящих в (4) [2–4].

Опишем способ нахождения коэффициентов  $a_k$ , входящих в (4), решения задачи (1)–(3), заданной на компактном графе  $G$ . Разобьем каждый отрезок  $[0, l_j]$  на  $n$  частей:  $[c_{i-1}^{(j)}, c_i^{(j)}]$ ,

$c_i^{(j)} \in R$ ,  $i = \overline{1, n}$ , так, что  $\bigcup_{i=1}^n [c_{i-1}^{(j)}, c_i^{(j)}] = \tilde{V}_j$ ,

$[c_{i-1}^{(j)}, c_i^{(j)}] \cap [c_{k-1}^{(j)}, c_k^{(j)}] = \emptyset$ , при  $i \neq k$ , а мера Лебега множества  $[0, l_j] \setminus \tilde{V}_j$  равна нулю. Введем

вектор-функцию  $z^{(i)} = (z_1^{(i)}(x_1), \dots, z_{j_0}^{(i)}(x_{j_0}))$ , в

которой  $z_j^{(i)} = \begin{cases} 1, & x \in [c_{i-1}^{(j)}, c_i^{(j)}]; \\ 0, & x \in [0, l_j] \setminus [c_{i-1}^{(j)}, c_i^{(j)}]. \end{cases}$  Умножим

скалярно левую часть уравнения  $Lu^{(n_0)} = \mu_{n_0} u^{(n_0)}$  на  $z^{(i)}$  и подставим в полученное выражение решение вида (4), имеем:

$$\begin{aligned} (Lu^{(n_0)}, z^{(i)}) &= \left( (T + P) \sum_{k=1}^n a_k v^{(k)}, z^{(i)} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{l_j} \sum_{k=1}^n a_k [T_j v_j^{(k)} + P_j v_j^{(k)}] z_j^{(i)} dx_j = \\ &= \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_{c_{i-1}^{(j)}}^{c_i^{(j)}} \sum_{k=1}^n a_k [\lambda_k v_j^{(k)} + P_j v_j^{(k)}] dx_j. \end{aligned}$$

Аналогичные действия произведем с правой частью  $\mu_{n_0} u^{(n_0)}$ . В итоге получим однородную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_k$ :

$$\sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{j_0} d_j \left[ (\lambda_k - \mu_{n_0}) \int_{c_{i-1}^{(j)}}^{c_i^{(j)}} v_j^{(k)} dx_j + \int_{c_{i-1}^{(j)}}^{c_i^{(j)}} P_j v_j^{(k)} dx_j \right] = 0, \quad (5)$$

$i = \overline{1, n}$ .

Очевидно, что система (5) имеет бесконечно много решений, что существенно осложняет вычисление  $a_k$  при программной реализации. Для нахождения  $n_0$ -й собственной вектор-функции  $\tilde{u}^{(n_0)}$ ,  $n_0 = \overline{1, n}$ , в системе (5) исключим  $n_0$ -ю строку; коэффициент  $a_{n_0}$ , для определенности, примем равным единице. Получим неоднородную систему уравнений:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n_0}}^n a_k b_{ik} = -b_{in_0}, \quad i = \overline{1, n}, \quad i \neq n_0, \quad (6)$$

$$\text{где } b_{ik} = \sum_{j=1}^{j_0} d_j \left[ (\lambda_k - \mu_{n_0}) \int_{c_{i-1}^{(j)}}^{c_i^{(j)}} v_j^{(k)} dx_j + \int_{c_{i-1}^{(j)}}^{c_i^{(j)}} P_j v_j^{(k)} dx_j \right].$$

Подставим решение (4) с найденными из (6) коэффициентами  $a_k$ ,  $k \neq n_0$ , в уравнение  $Lu^{(n_0)} = \mu_{n_0} u^{(n_0)}$  и проинтегрируем это уравнение по длине каждого ребра с учетом площади поперечного сечения  $d_j$ . Разрешив полученное уравнение относительно коэффициента  $a_{n_0}$ , получим формулу для определения оставшегося неизвестного коэффициента:

$$a_{n_0} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{j_0} d_j \left[ (\mu_{n_0} - \lambda_k) \int_0^{l_j} v_j^{(k)} dx_j - \int_0^{l_j} P_j v_j^{(k)} dx_j \right]}{\sum_{j=1}^{j_0} d_j \left[ (\lambda_{n_0} - \mu_{n_0}) \int_0^{l_j} v_j^{(n_0)} dx_j + \int_0^{l_j} P_j v_j^{(n_0)} dx_j \right]}. \quad (7)$$

Таким образом, для нахождения  $n_0$ -й собственной вектор-функции  $\tilde{u}^{(n_0)}$ , соответствующей известному собственному числу  $\mu_{n_0}$  задачи (1)–(3), необходимо найти  $n$  первых собственных вектор-функций  $\{v^{(k)}\}_{k=1}^n$  невозмущенной задачи, решить неоднородную систему уравнений (6), а коэффициент  $a_{n_0}$  вычислить по линейной формуле (7).

**Вычислительный эксперимент.** В качестве примера рассмотрим трехреберный граф  $G$  типа «звезда», состоящий из трех ребер  $\{E_j\}_{j=1}^3$  и четырех вершин  $\{V_i\}_{i=1}^4$ . Направление, длина, расположение ребер и вершин показаны на рис. 1.

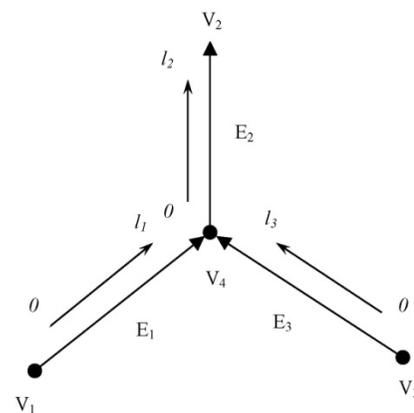


Рис. 1. Граф  $G$

На каждом ребре  $E_j$ ,  $j = \overline{1,3}$  введем вещественный параметр  $x_j$  изменяющийся от 0 до  $l_j$ , площадь поперечного сечения каждого ребра примем равной единице:  $d_j = 1$ . На графе  $G$  зададим вектор-функцию  $u = (u_1, u_2, u_3) \in H$ . На каждом ребре  $E_j$  введем уравнения вида

$$-u_j'' + p_j(x_j)u_j = \mu u_j. \quad (8)$$

Пусть компоненты вектор-функции  $u$  связаны между собой стандартными условиями склейки (2) и условием непрерывности (3). Условие (2) – это равенство нулю суммы нормальных производных компонент вектор-функции  $u$  в вершинах  $V_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ . В случае вершины  $V_4$  производная от компоненты  $u_2$  в точке берется со знаком «+», остальные – со знаком «-»:

$$-\left. \frac{du_1}{dx_1} \right|_{x_1=l_1} + \left. \frac{du_2}{dx_2} \right|_{x_2=0} - \left. \frac{du_3}{dx_3} \right|_{x_3=l_3} = 0. \quad (9)$$

В граничных вершинах  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  условия (2) обращаются в условия Неймана

$$\left. \frac{du_1}{dx_1} \right|_{x_1=0} = \left. \frac{du_2}{dx_2} \right|_{x_2=l_2} = \left. \frac{du_3}{dx_3} \right|_{x_3=0} = 0. \quad (10)$$

Условие непрерывности (3) означает, что, так как вершина  $V_4$  инцидентна всем трем ребрам, то значения компонент вектор-функции  $u$  на этих ребрах в концах, соответствующих вершине  $V_4$ , совпадают:

$$u_1(l_1) = u_2(0) = u_3(l_3). \quad (11)$$

Для нахождения системы координатных вектор-функций  $\{v^{(k)}\}_{k=1}^n$ , используемой при построении решения вида (4) задачи (8)–(11), решим краевую задачу:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 v_j^{(k)}}{dx_j^2} = \lambda_k v_j^{(k)}; \\ -\left. \frac{dv_1^{(k)}}{dx_1} \right|_{x_1=l_1} + \left. \frac{dv_2^{(k)}}{dx_2} \right|_{x_2=0} - \left. \frac{dv_3^{(k)}}{dx_3} \right|_{x_3=l_3} = 0; \\ \left. \frac{dv_1^{(k)}}{dx_1} \right|_{x_1=0} = \left. \frac{dv_2^{(k)}}{dx_2} \right|_{x_2=l_2} = \left. \frac{dv_3^{(k)}}{dx_3} \right|_{x_3=0} = 0; \\ v_1^{(k)}(l_1) = v_2^{(k)}(0) = v_3^{(k)}(l_3). \end{cases} \quad (12)$$

Собственные числа задачи (12) являются корнями трансцендентного уравнения

$$\frac{\left( \sin(\sqrt{-\lambda} l_3) \cos(\sqrt{-\lambda} l_2) + \cos(\sqrt{-\lambda} l_3) \sin(\sqrt{-\lambda} l_2) \right) \cos(\sqrt{-\lambda} l_1)}{\sin(\sqrt{-\lambda} l_1) \cos(\sqrt{-\lambda} l_2)} + \quad (13)$$

$$+ \cos(\sqrt{-\lambda} l_3) = 0,$$

а соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\begin{cases} v_1^{(k)}(x_1) = -\tilde{C}_1 \frac{\left( \sin(\sqrt{-\lambda_k} l_3) \cos(\sqrt{-\lambda_k} l_2) + \cos(\sqrt{-\lambda_k} l_3) \sin(\sqrt{-\lambda_k} l_2) \right) \cos(\sqrt{-\lambda_k} x_1)}{\sin(\sqrt{-\lambda_k} l_1) \cos(\sqrt{-\lambda_k} l_2)}; \\ v_2^{(k)}(x_2) = \tilde{C}_2 \left[ \frac{\cos(\sqrt{-\lambda_k} l_3) \sin(\sqrt{-\lambda_k} l_2) \sin(\sqrt{-\lambda_k} x_2)}{\cos(\sqrt{-\lambda_k} l_2)} + \frac{\cos(\sqrt{-\lambda_k} l_3) \cos(\sqrt{-\lambda_k} x_2)}{\cos(\sqrt{-\lambda_k} l_2)} \right]; \\ v_3^{(k)}(x_3) = \tilde{C}_3 \cos(\sqrt{-\lambda_k} x_3); \end{cases} \quad (14)$$

где константы  $\tilde{C}_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) определяются из условия нормировки, а  $\lambda_k$  – занумерованные решения уравнения (13).

Приближенные собственные числа  $\tilde{\mu}_k$  будем вычислять согласно линейным формулам, полученным в работах С.И. Кадченко (см., напр., [5]):

$$\tilde{\mu}_k(k) = \lambda_k + (Pv^{(k)}, v^{(k)}) + \tilde{\delta}_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

где  $\tilde{\delta}_k = \sum_{j=1}^{k-1} [\tilde{\mu}_j(k-1) - \tilde{\mu}_j(k)]$ ,  $\tilde{\mu}_j(k)$  –  $k$ -е приближения по Галеркину к соответствующим собственным числам  $\mu_k$ ; при этом  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_k = 0$ .

Для нахождения собственных функций  $u^{(k)}$ , соответствующих собственным числам  $\mu_k$ , задачи (8)–(11), был написан пакет программ, который решал следующие задачи:

– построение по заданным начальным данным формул (13) и (14);

– уточнение методом изоляции корней с нужной степенью точности  $n$  решений трансцендентного уравнения (13);

– построение набора собственных вектор-функций  $\{v^{(k)}\}_{k=1}^n$  невозмущенной спектральной задачи (12) по формулам (14);

– вычисление приближенных собственных чисел  $\tilde{\mu}_k$  задачи (8)–(11) по линейным формулам (15);

Значения  $\|Lu^{(k)}\|$  и  $\|\mu_k u^{(k)}\|$  задачи (8)–(11), вычисленные при  $n = 47$ ,

$$l_1 = \frac{\pi}{10}, l_2 = 1, l_3 = \frac{\pi}{8}, p_1(x_1) = \frac{x_1}{2}, p_2(x_2) = \sin(x_2), p_3(x_3) = e^{\frac{x_3}{3}}$$

$k$	$\ Lu^{(k)}\ $	$\ \mu_k u^{(k)}\ $	$\ Lu^{(k)}\  - \ \mu_k u^{(k)}\ $	$\frac{\ Lu^{(k)}\  - \ \mu_k u^{(k)}\ }{\ \mu_k u^{(k)}\ } \times 100\%$
1	2.291576628	2.277746169	0.013830458	0.6072
2	5.080123612	5.124655896	0.044532284	0.869
3	9.291628042	9.621392026	0.329763983	3.4274
4	9.577006327	10.012188647	0.435182319	4.3465
5	11.809063128	12.276632759	0.46756963	3.8086
	...	...	...	...
30	84.56011356	84.237567067	0.322546493	0.3829
31	92.308390629	92.598183011	0.289792382	0.3129
32	103.726076002	103.546424603	0.1796514	0.1735
	...	...	...	...
43	176.662198121	176.170212603	0.491985518	0.2793
44	117.893884525	118.679147167	0.785262642	0.6617
45	131.497300005	131.873366817	0.376066812	0.2852
46	146.512337032	146.933207981	0.420870949	0.2864
47	173.161929559	173.15997805	0.00195151	0.0011

– вычисление коэффициентов  $a_k$  путем решения неоднородной системы уравнений (6) и с использованием формулы (7).

Контроль корректности найденных формул (13) и (14) производился путем непосредственной подстановки найденных значений в каждое из уравнений, входящих в (12). В табл. 1 приведены нормы левой и правой частей уравнения (8) с подставленными в них собственными функциями задачи (8)–(11), найденными по описанному алгоритму, и разница между ними.

**Заключение.** Описанный метод достаточно эффективен в применении к задачам, заданным на графах с большим количеством ребер и вершин. Весьма прост при его программной реализации. В ходе проведенных вычислительных экспериментов метод показал хорошую точность и вычислительную эффективность в сравнении с известными методами.

#### Литература

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970. 512 с.

2. Kadchenko S.I. Spectral Problems on Compact Graphs // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2017. V. 10. № 3. P. 156–162. DOI: 10.14529/mmp170314.

3. Какушкин С.Н. Алгоритм нахождения собственных функций возмущенных самосопряженных операторов, заданных на компактных графах // Математическое моделирование процессов и систем: Мат-лы XI Международной молодежной научно-практической конференции. Стерлитамак, 10–12 ноября 2021 г. С. 234–238.

4. Какушкин С.Н. Развитие нового метода нахождения собственных функций возмущенных дискретных операторов, заданных на компактных графах // Уфимская осенняя математическая школа – 2021: Мат-лы Международной научной конференции. Уфа, 06–09 октября 2021 г. Т. 1. С. 46–49.

5. Кадченко С.И. Численные методы регуляризованных следов спектрального анализа. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. 206 с.

#### References

1. Mihlin S.G. Variacionnyye metody v matematicheskoy fizike, 1970. 512 p.

2. Kadchenko, S.I. Spectral Problems on Compact Graphs // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and

Computer Software. 2017, vol. 10, no. 3, pp. 156–162.  
DOI 10.14529/mmp170314.

3. Kakushkin S.N. Algoritm nakhozhdeniya sobstvennykh funktsiy vozmushchennykh samo-sopryazhennykh operatorov, zadannykh na kompaktnykh grafakh // Matematicheskoe modelirovanie processov i sistem: Mat-ly XI Mezhdunarodnoj molodezhnoj nauchno-prakticheskoy konferencii, 2021, pp. 234–238.

4. Razvitie novogo metoda nakhozhdeniya sobstvennykh funktsiy vozmushchennykh diskretnykh operatorov, zadannykh na kompaktnykh grafakh // Ufimskaya osenniyaya matematicheskaya shkola – 2021: Mat-ly Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, 2021, vol. 1, pp. 46–49.

5. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. CHislennyye metody regulyarizovannykh sledov spektral'nogo analiza, 2015, 206 p.



## **FINDING EIGENFUNCTIONS OF PERTURBED SELF-ADJOINT OPERATORS GIVEN ON A COMPACT GRAPH**

© **S.N. Kakushkin**

Administration of the municipal district Beloretsky district of the Republic of Bashkortostan,  
71, ulitsa Lenina, 453511, Beloretsk, Russian Federation

The substantiation of a numerical method for finding the eigenfunctions of perturbed self-adjoint operators given in a separable Hilbert space is considered. The method is adapted for problems given on finite connected oriented graphs with an arbitrary number of edges and vertices.

The non-iterative numerical method is based on simple formulas using information about the spectral characteristics of an unperturbed operator and its perturbing operator. Approximation of the perturbed operator by a matrix is not required. As an example, the developed technique is applied to a perturbed spectral problem given on a three-edge graph of the "star" type. The results of a computational experiment conducted using a software package written in the Maple mathematical environment are presented.

Keywords: eigenfunctions, perturbed operators, Hilbert space, compact graphs.