

УДК 524.882

DOI: 10.31040/2222-8349-2023-0-2-34-38

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ И ЭКСПОНЕНТЫ ЛЯПУНОВА ЧЕРНОЙ ДЫРЫ ФРОЛОВА

© Р.Х. Каримов

Бинарные черные дыры поддерживают неустойчивые орбиты на очень близких расстояниях. В простейшем случае, геодезические орбиты вокруг черной дыры Шварцшильда хотя и неустойчивы, но регулярны и зависят только от массы. В более сложных случаях геодезические могут зависеть от заряда, вращения и других параметров. При возмущении неустойчивые орбиты могут стать очагом хаоса. Все неустойчивые орбиты, будь то регулярные или хаотические, могут быть количественно определены их показателями Ляпунова. Показатели степени важны для наблюдений, поскольку фаза гравитационных волн может декогерентизироваться за ляпуновское время. Если временной масштаб диссипации из-за гравитационных волн короче ляпуновского времени, хаос будет затухающим и практически ненаблюдаемым. Эти два временных масштаба могут быть сопоставимы. Показатели Ляпунова следует использовать с осторожностью по нескольким причинам: они относительны и зависят от используемой системы координат, они меняются от орбиты к орбите и, наконец, они могут быть обманчиво разбавлены переходным поведением для орбит, которые проходят внутрь и наружу неустойчивых регионов. В работе исследована устойчивость круговых геодезических орбит пространства-времени черной дыры Фролова. Проанализировано влияние заряда черной дыры и масштабного параметра на стабильность геодезических орбит и показатель Ляпунова. Показано, что область устойчивых круговых орбит увеличивается с увеличением заряда черной дыры Q и масштабным параметром ℓ . Наибольшая область устойчивых круговых орбит черной дыры Фролова достигается при $Q = M$ и $\ell = 0.75M$.

Ключевые слова: геодезические орбиты, черные дыры, показатель Ляпунова, устойчивые орбиты.

Введение. Классическая теория гравитации Ньютона предсказывает движение планет вокруг Солнца по эллиптическим орбитам, описанные Кеплером. Теория гравитации Эйнштейна предсказывает прецессию эллиптических орбит вокруг центральной звезды, тем самым согласовывая прецессию перигелия Меркурия с общей теорией относительности. В предельном случае, когда в качестве центрального массивного объекта выступает черная дыра, помимо обычных устойчивых круговых орбит существует дополнительный набор неустойчивых орбит. С ними связаны гомоклинные орбиты, лежащие на границе между динамической устойчивостью и неустойчивостью [1]. К списку возможных неустойчивых орбит недавно был добавлен набор хаотических орбит для быстро вращающихся черных дыр [2].

С помощью гравитационно-волновых экспериментов LIGO и LISA было показано, что неустойчивость самых внутренних орбит вокруг черных дыр отмечает определенные

ориентиры на карте гравитационных волн [3, 4]. Гравитационные волны соседних неустойчивых орбит декогерентны во временной шкале. Если временная шкала рассеяния через гравитационное излучение быстрее, чем временная шкала неустойчивости, то хаос будет затухать, и сигнал гравитационной волны не будет заметно декогерентным.

Набор неустойчивых круговых орбит вокруг черной дыры Шварцшильда является следствием нелинейности общей теории относительности. Их неустойчивость может быть выражена положительным показателем Ляпунова [5]. Хотя показатели Ляпунова часто связывают с хаотической динамикой, геодезические вокруг черной дыры Шварцшильда не являются хаотическими: орбиты полностью разрешимы и, следовательно, интегрируемы. Однако при возмущении вероятно развитие хаоса вдоль неустойчивых круговых и гомоклинных орбит. Пример этого был обнаружен, когда черные дыры вращаются. Нелинейность вырождается

в неинтегрируемость и хаос [2]. Число неустойчивых периодических орбит растет так, что им приходится упаковываться во фрактал, чтобы втиснуться в эту область фазы [6]. Неустойчивые орбиты будут иметь положительные показатели Ляпунова и возникнут как фракталы в фазовом пространстве [2].

Показатели Ляпунова имеют некоторые недостатки в контексте общей теории относительности. Во-первых, показатели Ляпунова варьируются от орбиты к орбите и, таким образом, не обладают достаточной мощностью для сканирования коллективного поведения всех орбит, как это делают фрактальные методы. Во-вторых, показатели Ляпунова являются мерой отклонения двух соседних орбит во времени и поэтому явно зависят от используемой временной координаты. Поскольку время относительно, то и показатели Ляпунова тоже. Известно, что относительность показателей Ляпунова ошибочно приводит к нулю показателей Ляпунова для истинно хаотических систем [7]. Важно отметить, что топологические меры хаоса, такие как фракталы, инвариантны к координатам и не подвержены релятивизму пространства и времени [8]. В случаях, когда имеется предпочтительное направление времени, можно избежать неопределенности времени. Для простейшего случая черной дыры Шварцшильда существует времениподобный вектор Киллинга, в котором выбрано предпочтительное направление времени. Другими словами, из нашего положения, асимптотически далекого от черной дыры, мы используем в наших наблюдениях четко определенную временную координату. Пока мы добросовестно сравниваем все шкалы времени в одной и той же системе координат, мы должны получать значимые сравнения.

В работе рассматривается устойчивость круговых геодезических орбит и показатель Ляпунова пространства-времени черной дыры Фролова [9]. Черная дыра Фролова описывается тремя параметрами: массой, зарядом и критическим масштабным параметром, ограничивающим кривизну. В работе Фролова [9] было показано, что пространство-время черной дыры является несингулярным в центре, удовлетворяет условиям предельной кривизны и самосоглавленного испарения черной дыры.

Показатель Ляпунова и геодезическая устойчивость. Показатели Ляпунова являются мерой средней скорости, с которой сходятся

или расходятся близкие траектории в фазовом пространстве. Положительный показатель Ляпунова указывает на расхождение между близкими траекториями, т.е. на высокую чувствительность к начальным условиям. Анализ геодезической устойчивости в терминах показателей Ляпунова начинается с уравнений движения, схематически записываемых в виде

$$\frac{dX_i}{dt} = H_i(X_j) \quad (1)$$

и линеаризуется относительно некоторой орбиты:

$$\frac{d\delta X_i(t)}{dt} = K_{ij}(t)\delta X_j(t), \quad (2)$$

где

$$K_{ij}(t) = \left. \frac{\partial H_i}{\partial X_j} \right|_{X_i(t)}. \quad (3)$$

матрица линейной устойчивости [10]. Решение проблемы линеаризованного уравнения можно записать в виде

$$\delta X_i(t) = L_{ij}(t)\delta X_j(0), \quad (4)$$

в терминах матрицы эволюции $L_{ij}(t)$, которая должна подчиняться условиям

$$\dot{L}_{ij}(t) = K_{im}L_{mj}(t), \quad (5)$$

$$L_{ij}(0) = \delta_{ij}. \quad (6)$$

Определение собственных значений L_{ij} приводит к главному показателю Ляпунова λ , который задается в виде:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left[\frac{L_{jj}(t)}{L_{jj}(0)} \right]. \quad (7)$$

Ограничимся теперь классом задач, для которых имеется двумерное фазовое пространство вида $X_i(t) = (p_r, r)$. Сюда входят круговые орбиты в стационарном сферически-симметричном пространстве-времени и экваториальные круговые орбиты в стационарном пространстве-времени. Линеаризация уравнений движения с $X_i(t) = (p_r, r)$ около орбит r получаем

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & K_1 \\ K_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где

$$K_1 = \frac{d}{dr} \left(\dot{t}^{-1} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta r} \right), \quad (9)$$

$$K_2 = -(\dot{t} g_{rr})^{-1} \quad (10)$$

и \mathcal{L} – лагранжиан для геодезического движения. Поэтому для круговых орбит главные показатели Ляпунова с учетом уравнения (8) могут быть переписаны в виде

$$\lambda = \pm \sqrt{K_1 K_2}. \quad (11)$$

В дальнейшем мы опускаем знак \pm и будем ссылаться просто на «показатель Ляпунова». Из уравнений движения следует, что

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta r} = \frac{d}{dt} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{r}} = \frac{d}{dt} (-g_{rr} \dot{r}) = -\dot{r} \frac{d}{dr} (g_{rr} \dot{r}). \quad (12)$$

Используя определение эффективного потенциала $\dot{r}^2 = V_r$, уравнение (12) можно переписать в виде

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta r} = -\frac{1}{2g_{rr}} \frac{d}{dr} (g_{rr}^2 V_r). \quad (13)$$

Используя условия существования круговых геодезических $V_r = V_r'$ [12] уравнения (11) сводится к

$$\lambda = \sqrt{\frac{V_r''}{2\dot{t}^2}}. \quad (14)$$

Круговые геодезические. Исходная метрика Фролова, полученная в работе [9], в координатах Бойера-Лингквиста задается в виде:

$$ds^2 = -fdt^2 + f^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (15)$$

где

$$f = 1 - \frac{(2Mr - Q^2)r^2}{r^4 + (2Mr - Q^2)\ell^2}, \quad (16)$$

M и Q – масса и заряд черной дыры, ℓ – критический масштабный параметр, ограничивающий кривизну. В работе Фролова [9] было показано, что метрика (15)–(16) удовлетворяет условиям предельной кривизны и самосогласованного испарения черной дыры. Из (16) следует, что при $\ell = 0$ метрика (15)–(16) описывает черную дыру Рейснера-Нордстрема и при $\ell = Q$ = 0 описывает черную дыру Шварцшильда.

Согласно методу Кардосо и др. [11] эффективный потенциал радиального движения частиц может быть переписан для метрики вида (15) следующим образом:

$$V_r = f \left(\frac{E^2}{f} - \frac{L^2}{r^2} + \delta_1 \right), \quad (17)$$

где E – энергия частиц, L – угловой момент, $\delta_1 = 1$ для времени-подобных орбит и $\delta_1 = 0$ для нулевых орбит.

Далее в работе будут рассматриваться только времени-подобные круговые геодезические орбиты. Подставив $\delta_1 = 1$ в уравнение (17) и с учетом (16) эффективный потенциал можно переписать в виде

$$V_r = E^2 - \left(1 - \frac{(2Mr - Q^2)r^2}{r^4 + (2Mr - Q^2)\ell^2} \right) \left(\frac{L^2}{r^2} + 1 \right). \quad (18)$$

Используя условия существования круговых геодезических $V_r = V_r'$ можем получить, что

$$E^2 = \{r^4 + (Q^2 - 2Mr)(r^2 - \ell^2)\}^2 / [r^6\{2Q^2 + r(r - 3M)\} - 2r^4(Q^2 - 2Mr)\ell^2 + (Q^2 - 2Mr)^2\ell^4], \quad (19)$$

$$L^2 = -\{r^8(Q^2 - Mr) + r^4(Q^2 - 2Mr)^2\ell^2\} / [r^6\{2Q^2 + r(r - 3M)\} - 2r^4(Q^2 - 2Mr)\ell^2 + (Q^2 - 2Mr)^2\ell^4]. \quad (20)$$

где здесь и далее все величины оцениваются на радиусе круговой времени подобной орбиты.

Поскольку энергия должна быть действительной, мы требуем

$$r^6\{2Q^2 + r(r - 3M)\} - 2r^4(Q^2 - 2Mr)\ell^2 + (Q^2 - 2Mr)^2\ell^4 > 0.$$

Вторая производная эффективного потенциала задается в виде

$$V_r'' = -2\{-6r^8 + r^9 + 22r^6\ell^2 + 4Q^6\ell^4 - 32r^3\ell^4 - 4Q^4(r^6 - 3r^4\ell^2 + 6r\ell^4) + Q^2 \times (9r^7 - 33r^5\ell^2 + 48r^2\ell^4)\} / [(r^4 - Q^2\ell^2 + 2r\ell^2)\{-3r^7 + r^8 + 4r^5\ell^2 + Q^4\ell^4 + 4r^2\ell^4 + 2Q^2(r^6 - r^4\ell^2 - 2r\ell^4)\}]. \quad (21)$$

Для определения стабильных круговых орбит построим график зависимости V_r'' в зависимости от радиальной координаты.

Из рис. видно, что наименьшая область устойчивых круговых орбит определена при $\ell = 0$ и $Q = 0$ начинается от $6M$. Все орбиты меньше $6M$ являются неустойчивыми в этом случае. С увеличением заряда Q и масштабного параметра ℓ область устойчивых круговых орбит увеличивается. В предельном случае $\ell = 0.9M$ и $Q = M$ мы получили, что все круговые орбиты являются устойчивыми. Более детально, стабильные круговые орбиты исследуем с помощью экспонент Ляпунова.

Используя уравнения (15) и (18) для оценки ляпуновской экспоненты на круговых время подобных геодезических, получаем

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{(2f - rf')V_r''} = [r^6\{4Q^4 - 9MQ^2r + M(6M - r)r^2\} - r^4(12Q^4 - 33MQ^2r + 22M^2r^2)\ell^2 - 4(Q^2 - 2Mr)^3\ell^4]^{1/2} / \{r^4 - (Q^2 - 2Mr)\ell^2\}^{3/2}. \quad (22)$$

Из уравнения (22) следует, что экспоненты Ляпунова принимают мнимые значения при условии

$$P(r, M, Q, \ell) = r^6(4Q^4 - 9MQ^2r + 6M^2r^2 - r^3M) - r^4(12Q^4 - 33MQ^2r + 22M^2r^2)\ell^2 - 4(Q^2 - 2Mr)^3\ell^4 < 0. \quad (23)$$

При $P(r, M, Q, \ell) = 0$ получаем радиус наименьшей стабильной орбиты r_{ms} и, следовательно, область устойчивых круговых орбит определяется в диапазоне $r \in (r_{ms}, +\infty)$. Поскольку, уравнение (23) не имеет аналитического решения относительно r , будем решать его численными методами – поочередно подставляя численные значения Q и ℓ . Результаты внесены в таблицу.

Из табл. следует, что область устойчивых круговых орбит увеличивается с увеличением заряда Q и масштабного параметра ℓ . Наибольшая область устойчивости круговых орбит достигается при $Q = M$ и $\ell = 0.75M$. Таким образом, область устойчивых времени-подобных круговых орбит черной дыры Фролова всегда больше чем область черной дыры Шварцшильда.

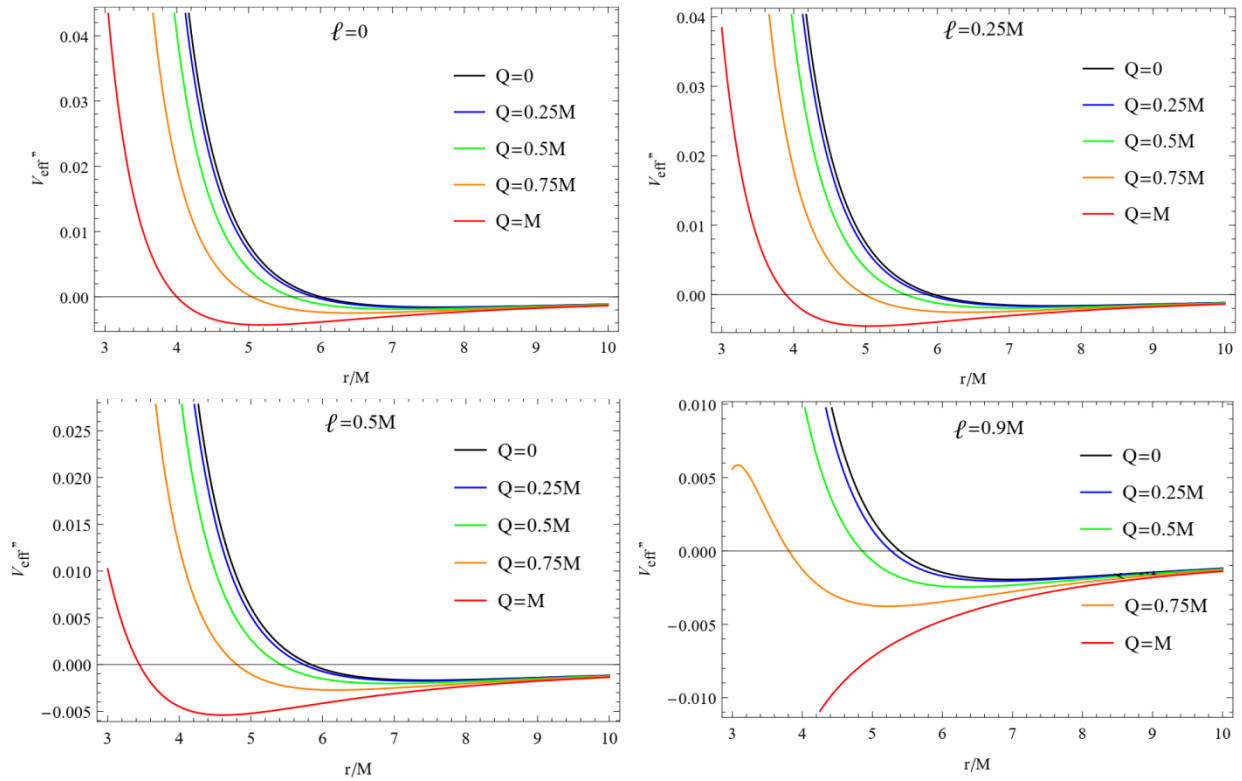


Рис. Зависимость второй производной эффективного потенциала от радиальной координаты r/M черной дыры Фролова для различных значений ℓ и Q

Т а б л и ц а

Безразмерный радиус наименьшей стабильной орбиты r_{ms}/M при разных значениях Q и ℓ

$Q/M \backslash \ell/M$	0	0.25	0.5	0.75	1
0	6.000	5.961	5.839	5.608	5.192
0.25	5.905	5.865	5.738	5.498	5.053
0.5	5.607	5.562	5.419	5.139	4.561
0.75	5.046	4.990	4.803	4.395	1.277
1	4.000	3.893	3.442	1.136	1.292

Заключение. В работе была исследована геодезическая устойчивость с помощью экспоненты Ляпунова для статической сферически-симметричной регулярной черной дыры Фролова. Для исследования были выбраны времени-подобные круговые орбиты, которые представляют наиболее интересный случай в физике [12, 13]. Используя экспоненты Ляпунова, можно легко определить, являются ли геодезические устойчивыми, неустойчивыми или маргинально устойчивыми. В случае черной дыры Фролова было показано, что на устойчивость орбит влияет как заряд черной дыры Q , так и масштабный параметр ℓ . Область устойчивых круговых орбит увеличивается с увеличением Q и ℓ . Отметим, что наибольшая область устойчи-

вости круговых орбит достигается при $Q = M$ и $\ell = 0.75M$, как это было показано в таблице. По сравнению с черной дырой Шварцшильда область устойчивых времени-подобных круговых орбит черной дыры Фролова всегда больше.

Исследование выполнено за счет гранта РБ НОЦ-ГМУ-2022 (приказ № 2987 от 29.11.2022 г.).

Литература

1. Bombelli L., Calzetta E. Chaos around a black hole // *Class. Quantum Grav.* 1992. V. 9. 2573 p.
2. Levin J. Gravity Waves, Chaos, and Spinning Compact Binaries // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 84. 3515 p.
3. Akiyama K. et al. (Event Horizon Telescope) First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The

Shadow of the Supermassive Black Hole // *Astrophys. J. Lett.* 2019. V. 875. P. L1.

4. Abbott B.P. et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger // *Phys. Rev. Lett.* 2016. V. 116. P. 061102.

5. Lobo J.A., Montero Á. Stochastic backgrounds of gravitational waves and spherical detectors // *Class. Quantum Grav.* 2002. V. 19. 6405 p.

6. Dettmann C.P., Frankel N.E., Cornish N.J. Fractal basins and chaotic trajectories in multi-black-hole spacetimes // *Phys. Rev. D.* 1994. V. 50. P. R618–R621.

7. Barrow J.D. Chaos in the Einstein Equations // *Phys. Rev. Lett.* 1981. V. 46. P. 963–966.

8. Cornish N.J., Levin J.J. The Mixmaster Universe is Chaotic // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 78. P. 998–1001.

9. Frolov V.P. Notes on nonsingular models of black holes // *Phys. Rev. D.* 2016. V. 94. 104056 p.

10. Cornish N.J., Levin J.J. Lyapunov timescales and black hole binaries // *Class. Quantum Grav.* 2003. V. 20. 1649 p.

11. Cardoso V., Miranda A.S., Berti E., Witek H., Zanchin V.T. Geodesic stability, Lyapunov exponents and quasinormal modes // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 79. 064016 p.

12. Fathi M., Olivares M., Villanueva J.R. Study of null and time-like geodesics in the exterior of a Schwarzschild black hole with quintessence and cloud of strings // *Eur. Phys. J. C.* 2022. V. 82. 629 p.

13. Wang C.-Y., Lee D.-S., Lin C.-Y. Null and timelike geodesics in the Kerr-Newman black hole exterior // *Phys. Rev. D.* 2022. V. 106. 084048 p.



GEODESIC ORBITS AND LYAPUNOV EXPONENTS OF FROLOV'S BLACK HOLE

© R.Kh. Karimov

Akmullah Bashkir State Pedagogical University,
3a, ulitsa Ojkyabrskoy Revolutsii, 450008, Ufa, Russian Federation

Binary black holes maintain unstable orbits at very close distances. In the simplest case of geodesics around a Schwarzschild black hole, the orbits, although unstable, are regular and depend only on the mass. In more complex cases, geodesics may depend on charge, rotation, and other parameters. When perturbed, unstable orbits can become a source of chaos. All unstable orbits, whether regular or chaotic, can be quantified by their Lyapunov exponents. Exponents are important for observations because the phase of gravitational waves can decohere in Lyapunov time. If the time scale of dissipation due to gravitational waves is shorter than the Lyapunov time, the chaos will be damped and practically unobservable. These two time scales can be compared. Lyapunov exponents should be used with caution for several reasons: they are relative and dependent on the coordinate system used, they vary from orbit to orbit, and finally, they can be deceptively diluted by transitional behavior for orbits that pass in and out of unstable regions. The stability of circular geodesic orbits of Frolov's black hole space-time is studied in this work. The influence of the black hole charge and the scale parameter on the stability of geodesic orbits and the Lyapunov exponent is analyzed. It is shown that the region of stable circular orbits increases with the black hole charge Q and the scale parameter ℓ . The largest region of stable circular orbits of Frolov's black hole is reached at $Q = M$ and $\ell = 0.75M$.

Keywords: geodesic orbits, black holes, Lyapunov exponent, stable orbits.