

УДК 534.113

DOI: 10.31040/2222-8349-2022-0-3-5-11

## ВЛИЯНИЕ СРЕДНЕГО ДАВЛЕНИЯ НА ИЗГИБ ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

© М.А. Ильгамов

Дается обзор исследований взаимодействия давлений на обе стороны тонкой упругой пластины и цилиндрической оболочки и изменения кривизны их срединной поверхности при изгибе. Влияние среднего давления устанавливалось до сих пор через уточнение распределенной поперечной силы в известных уравнениях изгиба длинной цилиндрической оболочки. В данной работе это влияние учитывается при выводе уравнения изгиба с волнообразованием по окружности и отсутствии волн по ее длине.

Ключевые слова: упругая пластинка, цилиндрическая оболочка, давление, изгиб.

**1. Введение.** В теории изгиба тонких пластин и оболочек принимается, что поперечная распределенная сила  $q$  на единичную площадь тонкой пластины равна  $q = p_1 - p_2$ , где  $p_1$  и  $p_2$  – давления, действующие на ее поверхности. Учет разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей пластины приводит к зависимости поперечной нагрузки  $q$  не только от перепада давлений, но и от самого изгиба.

В случае цилиндрического изгиба свободно опертой по кромкам пластины длиной  $L$  и толщиной  $h$  из материала с модулем упругости  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  поперечная сила равна [1–16]

$$q = p_1 - p_2 + p_m h \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right), \quad p_m = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad (1.1)$$

а прогиб  $w$  определяется через эффективную жесткость  $D(1 + \alpha)$ , где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad \alpha = \frac{p_m h L^2}{\pi^2 D}. \quad (1.2)$$

В приведенных работах рассмотрены задачи статического изгиба, колебаний пластин и пленок, устойчивость их плоской формы, контактного взаимодействия с жидкостями с применением значения поперечной распределенной силы (1.1). Особое внимание обращено на зависимость решения от среднего давления  $p_m$ . Формула (1.1) применена для описания работы микро- и нанорезонаторов, что видно по названиям статей в списке литературы. В преобразованном виде она используется также в задачах линейного и нелинейного изгиба круглых

и прямоугольных пластин и пленок. В некоторых работах последний член (1.1) трактуется как мера, описывающая поверхностный эффект (наряду с другими поверхностными эффектами, проявляющимися при толщинах пластин и проволок менее 10 мкм).

Более длительное применение находит выражение для поперечной распределенной нагрузки на колонны, стержни, проволоки круглого поперечного сечения радиусом  $R$ . В этом случае надо принять  $p_1 = p_2 = p$ . Тогда эта нагрузка равна

$$q = \pi R^2 p \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (1.3)$$

и направлена в сторону вогнутости осевой линии. Обзор соответствующих исследований изложен в [17]. В самое последнее время формула (1.3) применена для описания проволочных микро- и нанорезонаторов [18–20].

Поперечная распределенная сила (1.3) возникает также от внутреннего перепада давления в трубах. Тогда под  $R$  подразумевается внутренний радиус трубы и знак меняется на противоположный. Эта сила направлена в сторону выпуклости осевой линии трубы. Изгиб, колебания и устойчивость рассмотрены в [22–27].

Обзор исследований в этом направлении также имеется в работах [17, 21]. К последним исследованиям относятся статьи [28–34]. Отметим, что для анализа колебаний трубчатых круговых колец такая сила использовалась в работах [21, 35].

**2. Уравнение динамического изгиба длинной цилиндрической оболочки.** При анализе изгиба с волнообразованием по окружности длинной оболочки (или кольца) под действием давлений  $p_1$  и  $p_2$  (рис. 1) обычно принимается допущение о неизменности длины элемента  $ds$  срединной поверхности. Такое допущение приемлемо для анализа преимущественно изгиба любой линейчатой поверхности. Поэтому используем далее соотношение

$$ds = R d\theta \approx R_* d\theta_*, \quad (2.1)$$

где величины  $R$ ,  $d\theta$  относятся к состоянию до деформации, а  $R_*$ ,  $d\theta_*$  – после деформации. Соответствующие длины на внутренней и внешней поверхностях изогнутой оболочки равны

$$ds_1 = \left(R_* - \frac{h}{2}\right) d\theta_*, \quad ds_2 = \left(R_* + \frac{h}{2}\right) d\theta_*.$$

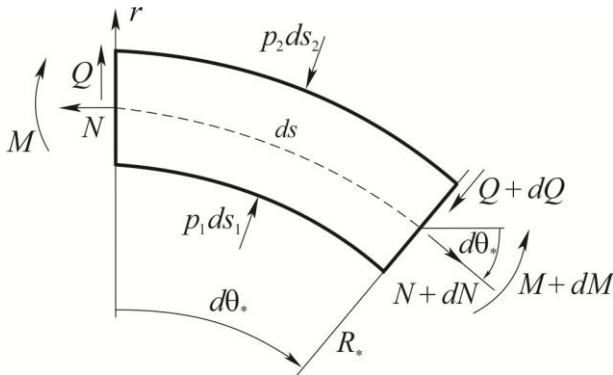


Рис. 1. Элемент  $ds$  с концевыми сечениями, перпендикулярными к изогнутой срединной поверхности

С учетом (2.1) и изменения кривизны, выраженного через компоненты перемещения  $v$  и  $w$  [21]

$$\kappa = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_*} = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \quad (2.2)$$

получаем

$$ds_1 = \left( 1 - \frac{h}{2} \left( \frac{1}{R} - \kappa \right) \right) R d\theta,$$

$$ds_2 = \left( 1 + \frac{h}{2} \left( \frac{1}{R} - \kappa \right) \right) R d\theta.$$

Распределенная поперечная сила, приходящаяся на элемент  $ds$  срединной поверхности, определяется как  $q ds = p_1 ds_1 - p_2 ds_2$ . Поэтому

$$q = p_1 - p_2 - \frac{p_m h}{R} (1 - R\kappa), \quad p_m = \frac{p_1 + p_2}{2}. \quad (2.3)$$

Если оболочка контактирует со средами, то возникающие при их взаимодействии динамические давления  $\bar{p}_1$ ,  $\bar{p}_2$  являются функциями прогиба  $w$ , угла  $\theta$  и времени  $t$ . Тогда линейное выражение для  $q$  приобретает вид

$$q = p_1 - p_2 + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \left( p_m + \bar{p}_m \right) \frac{h}{R} + p_m h \kappa$$

$$\bar{p}_m = \frac{\bar{p}_1 + \bar{p}_2}{2}. \quad (2.4)$$

В дальнейшем давления  $p_1$  и  $p_2$  будем считать постоянными по углу  $\theta$  и времени  $t$ .

Уравнения динамического изгиба имеют вид (рис. 1)

$$-N + (N + dN) \cos d\theta_* - (Q + dQ) \sin d\theta_* -$$

$$- \rho h ds \ddot{v} \cos(d\theta_*/2) = 0,$$

$$Q - (Q + dQ) \cos d\theta_* - (N + dN) \sin d\theta_* +$$

$$+ q ds \cos(d\theta_*/2) - \rho h ds \ddot{w} \cos(d\theta_*/2) = 0,$$

$$M - (M + dM) + (Q + dQ) ds = 0,$$

где точки над буквами обозначают производные по времени  $t$ .

Согласно (2.1) и (2.2)  $\partial \theta_*/\partial s = R^{-1} - \kappa$ .

С учетом  $\cos d\theta_* = 1$ ,  $\sin d\theta_* = d\theta_*$  получаем

$$\frac{\partial N}{\partial s} - Q \left( \frac{1}{R} - \kappa \right) - \rho h \ddot{v} = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + N \left( \frac{1}{R} - \kappa \right) - q + \rho h v \ddot{w} = 0, \quad (2.5)$$

$$Q = \frac{\partial M}{\partial s}.$$

Обозначим через  $N_0$ ,  $Q_0$ ,  $\kappa_0$ ,  $q_0$  величины, относящиеся к осесимметричному статическому состоянию оболочки, а без индексов – к несимметричному линейному динамическому и статическому изгибу. Исключив  $Q$  с помощью третьего уравнения (2.5) и подставив суммы  $N_0 + N$ ,  $M_0 + M$ ,  $\kappa_0 + \kappa$ ,  $q_0 + q$ , получаем две системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_0}{\partial s} - \frac{\partial M_0}{\partial s} \left( \frac{1}{R} - \kappa_0 \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 M_0}{\partial s^2} + N_0 \left( \frac{1}{R} - \kappa_0 \right) - q_0 = 0, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N}{\partial s} - \frac{\partial M}{R \partial s} - \rho h \ddot{v} = 0, \\ \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} - N_0 \kappa + \frac{1}{R} N - q + \rho h v \ddot{w} = 0. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

В соответствии с (2.2) изменение кривизны

$$\kappa_0 = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Так как  $M_0 = D\kappa_0 = 0$  по всей окружности оболочки, то и производные  $\partial M_0 / \partial s$ ,  $\partial^2 M_0 / \partial s^2$  равны нулю. Поэтому из (2.6) и (2.3) следует

$$N_0 = q_0 R = (p_1 - p_2)R - p_m h. \quad (2.8)$$

Под действием этой окружной силы происходит равномерное перемещение  $w_0$  по радиусу. Так как  $N_0 = Eh\varepsilon_0^0 = Eh w_0 / R$ , то с учетом (2.8) получаем

$$\frac{w_0}{R} = \frac{q_0 R}{Eh}. \quad (2.9)$$

В случае  $q_0 > 0$  происходит растяжение, причем наибольшее значение  $w_0 / R$  определяется пределом выносливости материала  $\sigma_{-1}$ . Тогда должно быть  $N_0 < \sigma_{-1} h$ . Для сталей  $\sigma_{-1} / E \sim 10^{-3}$ . Поэтому

$$\frac{w_0}{R} < \frac{\sigma_{-1}}{E} \approx 10^{-3}. \quad (2.10)$$

В случае  $q_0 < 0$  происходит сжатие, когда значение  $w_0 / R$  ограничивается критическим давлением, приводящим к изгибу с волнообразованием по окружности. Это критическое значение равно [21]  $q_0 = Eh^3 / (4R^3)$ . Подставляя значение  $q_0$  в (2.9), получаем

$$\frac{w_0}{R} < \frac{h^2}{4R^2}. \quad (2.11)$$

Для отношений  $h/R$  порядка  $10^{-1} - 10^{-3}$  по (2.11) также имеем  $w_0 / R < 10^{-3}$ . Оценки (2.10), (2.11) показывают применимость выражения (2.1). Для случая изгибных деформаций оно тем более верно, так как тогда окружная сила меньше, чем по (2.8).

Из сказанного следует, что вместо равенства  $ds_* = (1 + \varepsilon_0) ds$  можно принять выражение (2.1) и

$$\varepsilon_0 = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R} = 0, \quad \kappa = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{w}{R} \right). \quad (2.12)$$

Как указано выше, под  $p_1$ ,  $p_2$  подразумеваются статические значения давлений (общие давления равны  $\bar{p}_1 + \bar{p}_1$ ,  $\bar{p}_2 + \bar{p}_2$ , где  $\bar{p}_1$ ,  $\bar{p}_2$  – реакции со стороны контактирующих сред при движении оболочки). Заметим, выше при опре-

делении  $N_0$ , ...,  $\kappa_0$  не принимается во внимание динамическая составляющая. Поэтому давления  $\bar{p}_1$ ,  $\bar{p}_2$  относятся только к несимметричному движению.

С учетом (2.4) и (2.8) уравнение (2.7) приводим к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 M}{R \partial s^2} - \rho h \frac{\partial \ddot{v}}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} + \frac{N}{R} + \rho h \ddot{w} - (p_1 - p_2) R \kappa &= \\ &= \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \frac{h \bar{p}_m}{R}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Во втором уравнении (2.13) отсутствует член со средним давлением  $p_m$ . Независимость изгиба замкнутой цилиндрической оболочки от среднего давления  $p_m$  объясняется тем, что член  $p_m h \kappa$  в составе  $N_0 \kappa$  приводит к увеличению прогиба, например, по форме  $\sin n\theta$ , а в составе  $q$  – к уменьшению на такую же величину.

Исключив  $N$  из уравнений (2.13), получаем относительно функции изменения кривизны следующее уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \kappa}{\partial s^4} + \frac{\partial^2 \kappa}{R^2 \partial s^2} - \frac{(p_1 - p_2) R}{D} \frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} + \\ + \frac{\rho h}{D} \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial s^2} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial s} \right) = \frac{\partial^2 (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{D \partial s^2} - \frac{h \partial^2 \bar{p}_m}{DR \partial s^2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Тогда из (2.2) и (2.14) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{(p_1 - p_2) R^3}{D} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\ + \frac{\rho h R^4}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w \right) = \\ = \frac{R^4 \partial^2 (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{D \partial \theta^2} - \frac{R^3 h \partial^2 \bar{p}_m}{D \partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

**3. Анализ уравнения динамического изгиба.** В уравнении изгиба пластины всегда присутствует параметр, связанный со средним давлением  $p_m$  [1–16]. Такую зависимость показывают и формулы (1.1), (1.2). В свете этого выглядит необычным отсутствие подобного параметра в уравнениях (2.14), (2.15). Выше этот вопрос частично затронут. Продолжим его рассмотрение.

Проще показать указанную независимость при  $p_1 = p_2 = p = p_m$ . Тогда сила  $q$  по (2.3) и (2.12)

состоит из двух частей. Если принять  $w = W \sin n\theta$ , где  $n = 2, 3, \dots$ , то

$$q = -\frac{ph}{R} - \frac{phW(n^2 - 1)}{R^2} \sin n\theta. \quad (3.1)$$

Из-за кривизны  $R^{-1}$  есть постоянная распределенная сила, направленная к центру. На участке  $0 < n\theta < \pi$  поперечная сила, зависящая от изгиба по принятой форме и представленная вторым членом (3.1), также направлена к центру, а при  $-\pi < n\theta < 0$  – от центра (рис. 2, а). Такое воздействие силы препятствует изгибу.

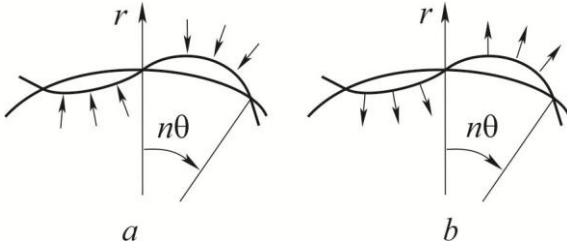


Рис. 2. Направления поперечных сил, возникающих при изгибе оболочки

При изгибе создается также поперечная сила, обусловленная окружной сжимающей силой по (2.8)  $N_0 = -ph$ , которая равна

$$-ph\kappa = \frac{phW(n^2 - 1)}{R^2} \sin n\theta. \quad (3.2)$$

Эта сила, направление которой показано на рис. 2, b, стремится увеличить изгиб. Ввиду равенства их с противоположными действиями, как это видно по (3.1), (3.2) и по рис. 2, нет влияния среднего давления  $p_m$  на изгиб. Аналогом является цилиндрический изгиб пластины, на свободно перемещающиеся кромки которой действует сжимающая сила  $ph$  [5–10].

Независимость от  $p_m$  является особенностью замкнутой оболочки, в которой под действием давлений на ее поверхности возникает окружная сила. Укажем на один частный случай, когда зависимость от  $p_m$  имеет место. При  $N_0 = 0$  или в соответствии с (2.8) при значениях давлений

$$p_1 \left(1 - \frac{h}{2R}\right) = p_2 \left(1 + \frac{h}{2R}\right) \quad (3.3)$$

во втором уравнении (2.7) будет отсутствовать член  $N_0$  к. Кроме того, в нем в соответствии с (2.4)

$$q = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \frac{\bar{p}_m h}{R} + p_m h\kappa, \quad (3.4)$$

$$p_m = \frac{p_1}{1 + h/2R} = \frac{p_2}{1 - h/2R}.$$

Поэтому последнее уравнение (2.13), а также (2.15) приобретают вид

$$\frac{\partial^2 M}{\partial s^2} + \frac{N}{R} - p_m h\kappa + \rho h \ddot{w} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \frac{\bar{p}_m h}{R},$$

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{p_m h R^2}{D} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) +$$

$$+ \frac{\rho h R^4}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w \right) =$$

$$= \frac{R^4 \partial^2}{D \partial \theta^2} \left( \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \frac{\bar{p}_m h}{R} \right). \quad (3.5)$$

Давления  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$ , возникающие при динамическом взаимодействии оболочки и жидкости (газа), могут быть близкими по величине, но иметь разные знаки в каждый момент времени. Поэтому  $\bar{p}_1 - \bar{p}_2$  представляет собой сумму давлений, а  $\bar{p}_m$  – их разность. Ввиду этого в уравнениях (2.14), (2.15), (3.4), (3.5) имеем оценку  $\bar{p}_m h/R \ll \bar{p}_1 - \bar{p}_2$ . Тогда член с  $\bar{p}_m$  может быть опущен.

**Заключение.** В статьях [1–16], посвященных учету влияния среднего давления на изгиб пластин различной формы, показано большое значение граничных условий. В частности, при действии давления на свободно перемещающиеся кромки пластины исчезает это влияние. Это объясняется равными поперечными силами, возникающими в результате изгиба и передачи сжимающей продольной силы от кромок. Аналогичная картина имеется в случае замкнутой круговой цилиндрической оболочки. В случае незамкнутой оболочки (удлиненная цилиндрическая панель или круговая арка) окружная сила зависит от условий закрепления кромок. Как правило, при этом изгиб зависит от среднего давления на поверхности  $p_m$ .

*Работа выполнена в рамках гранта Российской государственной научной программы № 22-21-00578, <https://rscf.ru/project/22-21-00578/>*

### Литература

- Ильгамов М.А. Взаимодействие неустойчивостей в гидроупругой системе // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 566–579.
- Ильгамов М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки //

ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405. DOI: 10.7868/S086956521728009X

3. Ильгамов М.А. О влиянии давления окружающей среды на изгиб пластины // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 5. С. 30–35.

4. Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость тонкой пластины при вакуумировании ее поверхностей // ДАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 542–544. DOI: 10.7868/S0869565218050079

5. Ильгамов М.А. Взаимодействие неустойчивостей Эйлера, Гельмгольца, Релея // ЖТФ. 2018. Т. 88. № 2. С. 163–167. DOI: 10.21883/JTF.2018.02.45401.2144

6. Ильгамов М.А. Изгибные колебания пластины при изменении среднего давления на ее поверхностях // Акустический журнал. 2018. Т. 64. № 5. С. 598–604 DOI: 10.1134/S0320791918050039

7. Ильгамов М.А., Галимов Н.К. О влиянии среднего давления среды на закритический изгиб круглой пластины // Известия Уфимского научного центра РАН. 2018. № 4. С. 5–10. DOI: 10.31040/2222-8349-2018-0-4-5-10

8. Ильгамов М.А. Обобщение уравнения изгиба тонкой пластины под действием давления газа // ПММ. 2019. Т. 83. № 1. С. 134–146. DOI: 10.1134/S0032823519010041

9. Ильгамов М.А., Моисеева В.Е. Изгиб круглой пластины под действием давления газа // Известия РАН, МТТ. 2019. № 3. С. 76–85. DOI: 10.1134/S0572329919030097

10. Ильгамов М.А., Моисеева В.Е. Нелинейный изгиб пологой панели под действием давления газа // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 3. С. 27–35. DOI: 10.1134/S0235711919030076

11. Ильгамов М.А. Влияние поверхностных эффектов на изгиб и колебания нанопленок // Физика твердого тела. 2019. Т. 61. Вып. 10. С. 1825–1830. DOI: 10.21883/FTT.2019.10.48255.381

12. Ильгамов М.А., Филиппов А.А. Изгиб прямоугольной пластины под действием давления // Известия Уфимского научного центра РАН. 2019. № 4. С. 5–10. DOI: 10.31040/2222-8349-2019-0-4-5-10

13. Ilgamov M.A., Moiseeva V.E. Dependence of axisymmetric bending of a circular plate on boundary conditions and pressure on its surface // Lobachevskii journal of mathematics. 2020. V. 41. № 7. P. 1216–1221. DOI: 10.1134/S1995080220070197

14. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Зависимость спектра частот микро- и нанорезонатора от давления и присоединенной массы // Контроль. Диагностика. 2021. Т. 24. № 6. С. 58–64. DOI 10.14489/td.2021.06.pp.058-064

15. Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Influence of pressure on the frequency spectrum of micro and nanoresonators on hinged supports // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2021. V. 7. № 2. P. 977–983. DOI: 10.22055/JACM.2021.36470.2848

16. Ilgamov M.A., Moiseeva V.E. On the effect of average pressure on a nonlinear boundary value problem

for a circular plate // Lobachevskii journal of mathematics. 2021. V. 42. № 8. P. 1982–1988. DOI: 10.1134/S1995080221080138

17. Ilgamov M.A. Static Problems of Hydroelasticity. М.: Nauka, Fizmatlit, 1998, 208 p.

18. Ильгамов М.А. Влияние поверхностных эффектов на изгиб и устойчивость нанопроволок // ДАН. 2019. Т. 488. № 2. С. 137–141. DOI: 10.31857/S0869-56524882137-141

19. Ильгамов М.А. Спектр частот проволочного микро- и нанорезонатора // ДАН. Физика, Технические науки. 2020. Т. 494. С. 17–20. DOI: 10.31857/S2686740020050089

20. Ильгамов М.А., Утяшев И.М. Непериодические колебания наноструны в газовой среде // ПММ. 2022. Т. 86. № 1. С. 66–76. DOI: 10.31857/S0032823522010052

21. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука. 1969. 182 с.

22. Ilgamov M.A., Tang D., Dowell E.H. Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // J. of Fluids and Structures. 1994. № 8. P. 139–156.

23. Tang D., Ilgamov M.A., Dowell E.H. Buckling and post-buckling behaviour of a pipe subjected to internal pressure // J. of Applied Mechanics. 1995. V. 62. № 3. P. 595–600.

24. Ilgamov M.A., Lukmanov R.L. Nonlinear vibrations of a pipeline under the action of pressure waves in fluid // Proceedings of the 9th Int. Offshore and Polar Eng. Conf. Brest, France, 1999. P. 145–152.

25. Ilgamov M.A., Ratrouf R. Large deflection of superconducting cable // Intern. J. of Non-Linear Mech. 1999. V. 34. P. 869–880.

26. Ильгамов М.А., Мишин В.Н. Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // Известия РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 181–192.

27. Хакимов А.Г. К статической устойчивости трубопровода // Журнал технической физики. 2020. Т. 90. Вып. 4. С. 612–617. DOI: 10.21883/JTF.2020.04.49086.214-19

28. Ильгамов М.А., Юлмухаметов А.А. Прямая и обратная задачи изгиба трубопровода // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 3. С. 100–112.

29. Ильгамов М.А. Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Известия РАН, МТТ. 2017. № 6. С. 83–96.

30. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. Пространственные колебания трубопровода с упруго-сдвигающейся опорой при действии внутреннего ударного давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. Т. 47 № 6. С. 3–12 DOI: 10.31857/S23571190002555-1

31. Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Вынужденные и параметрические колебания трубопрово-

да // Известия Уфимского научного центра РАН. 2020. № 3. С. 5–11. DOI: 10.31040/2222-8349-2020-03-5-11

32. Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний трубопровода // ПМТФ. 2020. Т. 61. № 6. С. 66–69. DOI: 10.15372/PMTF20200600

33. Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Положение динамического равновесия изогнутого трубопровода с вибрирующими опорами // ДАН. Физика, Технические науки. 2021. Т. 496. С. 55–59. DOI: 10.31857/S2686740021010053

34. Ильгамов М.А. Модель всплытия подводного трубопровода // ДАН. Физика, Технические науки. 2022. Т. 504. С. 12–16. DOI: 10.31857/S2686740022030087

35. Ильгамов М.А. К расчету упругих круговых колец на колебания // Известия Казанского филиала АН СССР. 1961. № 1. С. 29–36.

### References

1. Ilgamov M.A. The interaction of instabilities in a hydroelastic system // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, vol. 80, no. 5, pp. 400–408. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.02.007

2. Ilgamov M.A. Influence of the ambient pressure on thin plate and film bending // *Doklady Physics*, 2017, vol. 62, no. 10, pp. 461–464. DOI: 10.1134/S1028335817100020

3. Ильгамов М.А. Ilgamov M.A. On the effect of ambient pressure on the bending of a plate // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, vol. 46, no. 5, pp. 442–447. DOI: 10.3103/S1052618817050089

4. Ilgamov M.A. Bending and stability of a thin plate under vacuuming its surfaces // *Doklady Physics*, 2018, vol. 63, no. 7, pp. 244–246. DOI: 10.1134/S102833581806006X

5. Ilgamov M.A. Interaction between the Euler, Helmholtz, and Rayleigh instabilities // *Technical Physics*, 2018, vol. 63, no. 2, pp. 155–159. DOI: 10.1134/S1063784218020160

6. Ilgamov M.A. Flexural vibrations of a plate under changes in the mean pressure on its surfaces // *Acoustical Physics*, 2018, vol. 64, no. 5, pp. 605–611. DOI: 10.1134/S1063771018050032

7. Ilgamov M.A., Galimov N.K. On the influence of medium pressure on the supercritical bending of a round plate // *Izvestija Ufinskogo nauchnogo centra RAS*, 2018, no. 4, pp. 5–10. DOI: 10.31040/2222-8349-2018-04-5-10

8. Ilgamov M.A. Generalization of bending equation of thin plate under gas pressure // *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 348–355. DOI: 10.3103/S0025654419030130

9. Ilgamov M.A., Moiseeva V.E. Bending of a round plate under gas pressure // *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 4, pp. 551–558. DOI: 10.3103/S0025654419040083

10. Ilgamov M.A., Moiseeva V.E. Nonlinear bending of a shallow panel under the effect of gas pressure // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2019, vol. 48, no. 3, pp. 211–218. DOI: 10.3103/S1052618819030075

11. Ilgamov M.A. The influence of surface effects on bending and vibrations of nanofilms // *Physics of the Solid State*, 2019, vol. 61, no. 10, pp. 1779–1784. DOI: 10.1134/S1063783419100172

12. Ilgamov M.A., Filippov A.A. Bending of a rectangular plate under pressure // *Izvestija Ufinskogo nauchnogo centra RAS*, 2019, no. 4, pp. 5–10. DOI: 10.31040/2222-8349-2019-04-5-10

13. Ilgamov M.A., Moiseeva V.E. Dependence of axisymmetric bending of a circular plate on boundary conditions and pressure on its surface // *Lobachevskii journal of mathematics*, 2020, vol. 41, no. 7, pp. 1216–1221. DOI: 10.1134/S1995080220070197

14. Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Dependence of the frequency spectrum of a micro- and nanoresonator on pressure and attached mass // *Control. Diagnostics*, 2021, vol. 24, no. 6, pp. 58–64. DOI: 10.14489/td.2021.06.pp.058-064

15. Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Influence of pressure on the frequency spectrum of micro and nanoresonators on hinged supports // *J. of Applied and Computational Mechanics*, 2021, vol. 7, no. 2, pp. 977–983. DOI: 10.22055/JACM.2021.36470.2848

16. Ilgamov M.A., Moiseeva V.E. On the effect of average pressure on a nonlinear boundary value problem for a circular plate // *Lobachevskii journal of mathematics*, 2021, vol. 42, no. 8, pp. 1982–1988. DOI: 10.1134/S1995080221080138

17. Ilgamov M.A. *Static Problems of Hydroelasticity*. M.: Nauka, Fizmatlit, 1998, 208 p.

18. Ilgamov M.A. Influence of surface effects on bending and buckling of nanowires // *Doklady Physics*, 2019, vol. 64, no. 9, pp. 345–348. DOI: 10.1134/S1028335819090040

19. Ilgamov M.A. Frequency spectrum of a wire micro- and nanoresonator // *Doklady Physics*, 2020, vol. 65, no. 9, pp. 326–329. DOI: 10.1134/S1028335820090049

20. Ilgamov M.A., Utyashev I.M. Nonperiodic oscillations of micro- and nanostrings in a gaseous medium // *Fluid Dynamics*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1062–1069. DOI: 10.1134/S0015462821080073

21. Ilgamov M.A. *Vibrations of elastic shells containing liquid and gas*. M.: Nauka, 1969, 182 p.

22. Ilgamov M.A., Tang D., Dowell E.H. Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // *J. of Fluids and Structures*, 1994, no. 8, pp. 139–156.

23. Tang D., Ilgamov M.A., Dowell E.H. Buckling and post-buckling behaviour of a pipe subjected to internal pressure // *J. of Applied Mechanics*, 1995, vol. 62, no. 3, pp. 595–600.

24. Ilgamov M.A., Lukmanov R.L. Nonlinear vibrations of a pipeline under the action of pressure waves

in fluid // Proceedings of the 9th Int. Offshore and Polar Eng. Conf., Brest, France, 1999, pp. 145-152.

25. Ilgamov M.A., Ratrouf R. Large deflection of superconducting cable // Intern. J. of Non-Linear Mech., 1999, vol. 34, pp. 869-880.

26. Ilgamov M.A., Mishin V.N. Transverse oscillations of a pipe under the action of traveling waves in a liquid // Izvestiya RAN. MTT, 1997, no. 1, pp. 181-192.

27. A. G. Khakimov. Static Stability of a Pipeline // Technical Physics, 2020, vol. 65, no. 4, pp. 587-592. DOI: 10.1134/S106378422004012X

28. Ilgamov M.A., Yulmukhametov A.A. Direct and inverse problems of pipeline bending // Bulletin of the Perm national research polytechnic university. Mechanics, 2017, no. 3, pp. 100-112.

29. Ilgamov M.A. Dynamics of a Pipeline under the Action of Internal Shock Pressure // Mechanics of Solids, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 663-674. DOI: 10.3103/S0025654417060061

30. Ganiev R.F., Ilgamov M.A., Khakimov A.G., Shakiryaynov M.M. Spatial Vibrations of a Pipeline with Elastically Deflecting Support under the Action of Inter-

nal Shock Pressure // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2018, vol. 47, no. 6, pp. 479-486. DOI: 10.3103/S1052618818060031

31. Ilgamov M.A., Shakiryaynov M.M. Forced and parametric oscillations of the pipeline // Izvestiya Ufimskogo nauchnogo centra RAS, 2020, no. 3, pp. 5-11. DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-3-5-11

32. Ilgamov M.A., Shakiryaynov M.M. Interaction between forced and parametric vibrations of a pipeline // J. of Applied Mechanics and Technical Physics, 2020, vol. 61, no. 6, pp. 964-967. DOI: 10.1134/S0021894420060085

33. Ilgamov M.A., Shakiryaynov M.M. Dynamic equilibrium positions of bent pipeline with vibrating supports // Doklady Physics, 2021, vol. 66, no. 2, pp. 51-54. DOI: 10.1134/S1028335821020026

34. Ilgamov M.A. Model of underwater pipeline flotation // Doklady Physics, 2022, vol. 504, pp. 12-16. DOI: 10.31857/S2686740022030087

35. Ilgamov M.A. On the calculation of elastic circular rings for vibrations // Izvestiya Kazanskogo filiala AN SSSR, 1961, no. 1, pp. 29-36.



## **EFFECT OF MEAN PRESSURE ON THE BENDING OF A LONG CYLINDRICAL SHELL**

© M.A. Ilgamov<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Institute of Mechanics and Mechanical Engineering FITC KazNC RAS,  
2/31, ulitsa Lobachevskogo, 420111, Kazan, Russian Federation

<sup>2</sup>Bashkir State University,  
32, ulitsa Zaki Validi, 450076, Ufa, Russian Federation

<sup>3</sup>R.R. Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
71, prospekt Oktybrya, 450054, Ufa, Russian Federation

A review is given of studies of the interaction of pressures on both sides of a thin elastic plate and a cylindrical shell and changes in the curvature of their middle surface during bending. The influence of the average pressure has been established so far by refining the distributed transverse force in the known equations for the bending of a long cylindrical shell. In this paper, this influence is taken into account when deriving the equation for bending with wave formation along the circumference and the absence of waves along its length.

Keywords: elastic plate, cylindrical shell, pressure, bending.