МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

УДК 519.624, 534.1
DOI: 10.31040/2222-8349-2022-0-1-5-9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКРЕПЛЕНИЙ ОБОИХ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ЕГО КОЛЕБАНИЙ

© А.А. Аитбаева

Стержень может быть закреплен по-разному. На практике, под действием внешних факторов, могут нарушиться заложенные в проект граничные условия на концах стержня. Поэтому возникают задачи создания неразрушающих методов определения степени нарушения первоначальных граничных условий. В данной работе рассматривается задача определения вида закрепления концов стержня по собственным частотам его колебаний. Считается, что на левом и правом концах стержня могут быть следующие виды закреплений: заделка, плавающая заделка, свободное опирание, свободный конец. Эти закрепления образуют шестнадцать видов краевых условий: заделка – заделка, заделка – свободное опирание, заделка – плавающая заделка, заделка – свободный конец, свободное опирание – заделка, свободное опирание – свободное опирание, свободное опирание – плавающая заделка, свободное опирание – свободный конец, плавающая заделка – заделка, плавающая заделка – свободное опирание, плавающая заделка – плавающая заделка, плавающая заделка – свободный конец, свободный конец – заделка, свободный конец – свободное опирание, свободный конец – плавающая заделка, свободный конец – свободный конец. Показано, что по одной собственной частоте колебания стержня и зная о наличии «нулевой» собственной частоты (нулевое собственное значение соответствующей задачи на собственные значения), можно восстановить вид закрепления на обоих концах стержня.

Ключевые слова: собственные частоты, собственные значения, стержень, краевые условия.

Введение. Стержни являются элементами многих механизмов и устройств. Поэтому становится важным изучение процессов, которые происходят внутри различных механических систем. Например, колебания и вибрации, возникающие в машинах или устройствах, могут вызвать погрешности в работе, понизить надежность, возможны также разрушения и аварии. Вот почему на сегодняшний день интенсивно развивается акустическая диагностика, которая позволяет решать задачи оперативного контроля механических систем по характеристикам звуковых колебаний. Учеными достаточно хорошо разработаны акустические методы обнаружения трещин, определение области или формы предмета [1–4], а задачи по диагностики состояния закреплений стержней стали решатся относительно недавно.

Стержень может быть закреплен по-разному. На практике, под действием внешних факторов, могут нарушиться заложенные в проект граничные условия на концах стержня. Поэтому возникают задачи создания неразрушающих методов определения степени нарушения первоначальных граничных условий. Такие задачи, например, приведены в работах [5–11]. Наиболее близки к статье работы [5], [10], [11]. В монографии [5] было показано, что по девяти собственным частотам колебаний стержня можно определить вид и параметры закрепления обоих его концов. В настоящей же статье показано, что для определения типа закрепления концов стержня, которые могут быть следующих видов: заделка, свободное опирание, плавающая заделка, свободный конец, достаточно не девяти, а одной собственной частоты. Работы [10, 11] посвящены определению видов закреплений трубопроводов с жидкостью. Показано [10], что при протекании жидкости по трубопроводу, наблюдается однозначность определения краевых условий, а при отсутствии – двойственность. Доказано [5, 10], что если жидкость не течет по трубопроводу, то для определения краевых условий, необходимо девять собственных значений. В отличие от этих работ здесь рассматривается задача определения краевых условий для стержня, а не для трубопровода. Показано, что по одной собственной частоте колебания стержня и зная о наличии «нулевой» собственной частоте можно

АИТБАЕВА Айгуль Азаматовна – к.ф.-м.н., Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, e-mail: phunakoshi@mail.ru

определить один из шестнадцати видов закреплений стержня, с точностью до перестановок закреплений на концах. Под «нулевой собственной частотой» понимается нулевое собственное значение соответствующей задачи на собственные значения. «Нулевой собственной частоте» соответствует не собственное колебание, а так называемое собственное движение.

Постановка задачи. В данной работе рассматриваются поперечные колебания однородного стержня. Для постановки задачи используется уравнение свободных изгибных колебаний стержня [12]:

$$EI\,\frac{\partial^4 U(X,t)}{\partial X^4}+\rho F\,\frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2}=0, \qquad (1)$$

где прогиб оси стержня U $(X,\ t)$ является функцией двух переменных координаты X и времени t, EI – изгибная жесткость стержня, ρ – плотность материала, F – площадь поперечного сечения стержня.

В момент времени $t = 0$ должны выполнятся начальные условия: $U\ (X,\ 0) = f\ (X)$, $\dfrac{\partial U}{\partial t}(X,0)=g(X)$, где $f\ (X)$, $g(X)$ – функции, определяющие начальное положение и начальные скорости точек оси стержня. Введя обозначения $x = X/L$, $u = U/L$, где L – длина стержня, запишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{\partial^4 u(x,\ t)}{\partial x^4}+\ \frac{\rho F L^4}{EI}\ \frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2}=0.$$

На левом конце при $(x = 0)$ и на правом $(x = 1)$ концах стержня могут быть четыре вида закрепления:

1. заделка: $u\ =\ 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{x}}\ =\ 0;$
2. свободное опирание: $u\ =\ 0,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{x}^2}\ =\ 0;$
3. свободный конец: $\dfrac{\partial^3 u}{\partial \mathrm{x}^3}=0,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{x}^2}=0;$
4. плавающая заделка: $\dfrac{\partial^3 u}{\partial \mathrm{x}^3}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{x}}=0;$

Обозначим $\rho FL^4/(EI)$ через λ^4. Введя замену $u(x,\ t) = y(x)\ \cos(\omega t)$, уравнение и краевые условия запишутся следующим образом [12]:

$$y^{(4)}=\lambda^4 y, \qquad (2)$$

1) заделка: $y(x)=0$, $y'(x)=0;$

2) свободное опирание: $y(x)=0,\quad y''(x)=0;$

3) свободный конец: $y'''(x)=0,\quad y''(x)=0;$

4) плавающая заделка: $y'''(x)=0,\quad y'(x)=0.$

В общем виде краевые условия для левого и правого концов стержня можно записать так [5]:

$$\begin{aligned} Y(1)&=-a_1 y(0)+\ a_2 y(0)=0,\\ Y(2)&=-a_3 y(0)+a_4 y(0)=0; \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} Y(3)&=b_1 y(1)+b_2 y(1)=0,\\ Y(4)&=b_3 y(1)+\ b_4 y(1)=0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Для условия «заделка» будут равны нулю следующие коэффициенты: $a_2=a_4=0,$ $b_2=b_4=0;$ для условия «свободное опирание»: $a_2=a_3=0,\ \ b_2=b_3=0$; для условия «плавающая заделка»: $a_1=a_4=0,\ \ b_1=b_4=0$; для условия «свободный конец»: $a_1=a_3=0,$ $b_1=b_3=0.$

Для решения задачи используется фундаментальная система Коши. Фундаментальной системой Коши в случае изгибных колебаний стержней с постоянными по длине параметрами являются функции:

$$y_1(x,\lambda)=(\cos\lambda x\ +\ \mathrm{ch}\,\lambda x)/2,$$
$$y_2(x,\lambda)=(\sin\lambda x+\mathrm{sh}\,\lambda x)/2\lambda,$$
$$y_3(x,\lambda)=(-\cos\lambda x+\mathrm{ch}\,\lambda x)/2\lambda^2,$$
$$y_4(x,\lambda)=(-\sin\lambda x+\mathrm{sh}\,\lambda x)/2\lambda^3,$$

которые выражаются через функции Крылова [12] и являются линейно независимыми решениями уравнения:

$$y^{(4)}(x,\ \lambda)=\lambda^4 y(x,\lambda), \qquad (5)$$

удовлетворяющие условиям

$$y_j^{(r-1)}(0,\lambda)=\begin{cases}0, & j\ne r,\\ 1, & j=r\end{cases} \qquad (j,r=1,2,3,4) \qquad (6)$$

Общее решение уравнения (5) представляется в следующем виде:

$$y(x)=y(x,\ \lambda)=C_1 y_1(x,\lambda)+$$
$$+C_2 y_2(x,\lambda)+C_3 y_3(x,\lambda)+C_4 y_4(x,\lambda).$$

Для нахождения констант C_1 , C_2 , C_3 , C_4 используем краевые условия (3), (4):

$$Y_i(y)=Y_i(C_1 y_1+C_2 y_2+C_3 y_3+C_4 y_4),\quad (i\ =\ 1,\ 2,3,4). \qquad (7)$$

Уравнение для определения собственных значений задачи (2)–(4) следует из условия существования ненулевого решения системы (7). Ненулевое решение для (7) существует тогда и только тогда, когда равняется нулю определитель системы:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Этот определитель называют характеристическим определителем спектральной задачи (2)–(4). Его нули совпадают с собственными значениями этой задачи.

Результаты. Предполагаем, что собственные значения вещественны, собственные значения задачи (2), (3) совпадают с собственными частотами. Для каждого из шестнадцати видов закреплений найдем собственные значения. Результаты расчетов приведем в табл. (собственные значения приведены с точностью до шести знаков после запятой, вычислительные эксперименты проводились с точностью до двадцати знаков после запятой, о наличие «нулевой» собственной частоты говорит знак «+» в таблице, а об ее отсутствии знак «–»).

Из табл. видно, что собственные частоты колебания стержня для симметричных краевых условий будут одинаковы. Например, случай «заделка – плавающая заделка» идентичен случаю «плавающая заделка – заделка». Заметим, что собственные значения для случая «плавающая заделка – заделка» такие же, как и для случая «свободный конец – плавающая заделка», отличие лишь в том, что у последнего есть нулевое собственное значение. В табл. под номером 1 и 2 приведены два симметричных краевых условия с одинаковыми собственными частотами и только при закреплениях «свободный конец – плавающая заделка» «свободный конец – свободное опирание» имеем «нулевое» собственное значение. В случае 3 и 4 имеем разные краевые условия, но при краевых условия вида «свободный конец – свободный конец» и «плавающая заделка – плавающая заделка» имеем «нулевое» собственное значение. В случае 5 и 6 имеем симметричные краевые условия. Можно сделать следующий вывод: *если известно значение первой собственной частоты, а также известно о наличии «нулевой» собственной частоты, то закрепления на обоих концах стержня (заделка, свободное опирание, плавающая заделка, свободный конец) определяются однозначно с точностью до перестановок закреплений на его концах*.

Пример 1. Пусть известно только одно собственные значение $\lambda = 13.351769$. Из табл. видим, что такое значение будет для двух симметричных краевых условий «свободный конец – свободное опирание» и «заделка – свободное опирание». Из этого следует, что одной только собственной частоты недостаточно для однозначной идентификации вида закрепления концов стержня.

Таблица

Собственные значения для неупругих видов закреплений

№	Вид краевых условий	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1	Заделка – плавающая заделка	–	2.365020	5.497804	8.639370	11.780972
	Плав. заделка – заделка	–	2.365020	5.497804	8.639370	11.780972
	Плав. заделка – св. конец	–	2.365020	5.497804	8.639370	11.780972
	Св. конец – плав. заделка	+	2.365020	5.497804	8.639370	11.780972
2	Заделка – св. опирание	–	3.926602	7.068583	10.210177	13.351769
	Св. опирание – заделка	–	3.926602	7.068583	10.210177	13.351769
	Св. опирание – св. конец	–	3.926602	7.068583	10.210177	13.351769
	Св. конец – св. опирание	+	3.926602	7.068583	10.210177	13.351769
3	Св.конец – св. конец	+	4.730041	7.853205	10.995608	14.137165
	Заделка – заделка	–	4.730041	7.853205	10.995608	14.137165
4	Св. опирание – св. опирание	–	3.141593	6.283185	9.424778	12.566371
	Плав. заделка – плав. заделка	+	3.141593	6.283185	9.424778	12.566371
5	Плав. заделка – св. опирание	–	1.570796	4.712389	7.853982	10.995574
	Св. опирание – плав. заделка	–	1.570796	4.712389	7.853982	10.995574
6	Заделка – св. конец	–	1.875104	4.694091	7.854757	10.995541
	Св. конец – заделка	–	1.875104	4.694091	7.854757	10.995541

Пример 2. Для решения задачи рекомендуется брать собственную частоту с маленькими порядковым номером. Так как при возрастании порядкового номера, собственные частоты могут стремиться друг к другу. Например, из табл. видно, что такими краевыми условиями будут «заделка – свободный конец» и «плавающая заделка – свободное опирание». Поэтому использование первой собственной частоты обусловлено меньшей погрешностью решения задачи.

Пример 3. Приведем пример, когда на одном из концов стержня реализовано упругое закрепление. Пусть левый конец стержня заделан, а правый конец закреплен двумя пружинками. В формуле (4) коэффициенты b_1 и b_2 отвечают за коэффициенты жесткостей пружинок. Пусть b_1 и b_2 равны: b_1 = 1.881625, b_3 = 0.169337. Краевые условия запишутся следующим образом:

$$U_1(y) = y\left(0\right) = 0, \quad U_2(y) = y\ \left(0\right) = 0,$$

$$U_3(y) = 1.881625y\left(1\right) + \ y\left(1\right) = 0,$$

$$U_4(y) = 0.169337y\left(1\right) + \ y\left(1\right) = 0,$$

Найдем первые четыре собственных значения для данного случая: λ_1 = 1.570796, λ_2 = 4.712389, λ_3 = 7.871939, λ_4 = 11.009281. Из табл. видим, что первые две частоты примера совпадают с частотами закрепления «свободное опирание – плавающая заделка». Таким образом, для идентификации упругого вида закрепления стержня требуется большее число собственных частот.

Заключение. С помощью проделанных выкладок и приведенных примеров показано, что закрепление на обоих концах стержня, которое может быть вида: заделка – заделка, заделка – свободное опирание, заделка – плавающая заделка, заделка – свободный конец, свобод- ное опирание – заделка, свободное опирание – свободное опирание, свободное опирание – плавающая заделка, свободное опирание – свободный конец, плавающая заделка – заделка, плавающая заделка – свободное опирание, плавающая заделка – плавающая заделка, плавающая заделка – свободный конец, свободный конец – заделка, свободный конец – свободное опирание, свободный конец – плавающая заделка, свободный конец – свободный конец, можно определить однозначно. Для этого достаточно знать значение первой собственной частоты, а также знать о наличии «нулевой» собственной частоты.

Литература

1. Majkut L. Acoustical diagnostics of cracks in beam like structures // Archives of Acoustics. 2006. Т. 31. № 1. С. 17–28.

2. Гладвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» // Институт компьютерных исследований. М.; Ижевск, 2008. 608 с.

3. Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. 2005. № 9. С. 44–56.

4. Morassi A., Dilena M. On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements // Inverse Problems in Engineering, 2002. V. 10. № 3. P. 183–201.

5. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.

6. Ахтямов А.М., Ахтямова А.А. Об однозначности идентификации параметров упругого закрепления и сосредоточенного инерционного элемента // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6. № 1. С. 62–69.

7. Ахтямов А.М., Муфтахов А.В., Ямилова Л.С. Идентификация вида и параметров закрепления стержня по собственным частотам его колебаний // Акустический журнал. 2008. Т. 54. № 2. С. 181–188.

8. Ахтямов А.М., Аитбаева А.А. Об однозначности определения вида краевых условий на одном из концов стержня по трем собственным частотам его колебаний // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. № 3. С. 388–394.

9. Ахтямов А.М., Аитбаева А.А. Идентификация закрепленности и нагруженности одного из концов балки Эйлера–Бернулли по собственным частотам ее колебаний // Сибирский журнал индустриальной математики. 2017. Т. 20. № 1(69). С. 3–10.

10. Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф. Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная математика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 1. С. 139–147.

11. Ахтямов А.М., Шагиев В.Р. Идентификация неупругих видов закреплений трубопроводов // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21. № 1. С. 21–25.

12. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В.В. Болотина, Машиностроение. М., 1978. 352 с.

References

1. Majkut L. Acoustical diagnostics of cracks in beam like structures // Archives of Acoustics, 2006, vol. 31, no. 1, pp. 17–28.

2. Gladvell G.M.L. Obratnye zadachi teorii kolebanij, NICz «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika» // Institut kompyuternykh issledovanij, 2008, 608 p.

3. Vatulyan A.O., Soluyanov N.O. Ob opredelenii mestopolozheniya i razmera polosti v uprugom sterzhne // Defektoskopiya, 2005, no. 9, pp. 44–56.

4. Morassi A., Dilena M. On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements // Inverse Problems in Engineering, 2002, vol. 10, no. 3, pp. 183–201.

5. Akhtyamov A.M. Teoriya identifikaczii kraevykh uslovij i ee prilozheniya, 2009, 272 p.

6. Akhtyamov A.M., Akhtyamova A.A. Ob odnoznachnosti identifikaczii parametrov uprugo zakrepleniya i sosredotochennogo inerczionnogo elementa // Vychislitelnaya mekhanika sploshnykh sred, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 62–69.

7. Akhtyamov A.M., Muftakhov A.V., Yamilova L.S. Identifikacziya vida i parametrov zakrepleniya sterzhnya po sobstvenny`m chastotam ego kolebanij // Akusticheskij zhurnal, 2008, vol. 54, no. 2, pp. 181–188.

8. Akhtyamov A.M., Aitbaeva A.A. Ob odnoznachnosti opredeleniya vida kraevykh uslovij na odnom iz konczov sterzhnya po trem sobstvennym chastotam ego kolebanij // Prikladnaya matematika i mekhanika, 2016, vol. 80, no. 3, pp. 388–394.

9. Akhtyamov A.M., Aitbaeva A.A. Identifikacziya zakreplennosti i nagruzhennosti odnogo iz konczov balki Ejlera–Bernulli po sobstvennym chastotam ee kolebanij // Sibirskij zhurnal industrialnoj matematiki, 2017, vol. 20, no. 1(69), pp. 3–10.

10. Akhtyamov A.M., Safina G.F. Opredelenie vibrozashhitnogo zakrepleniya truboprovoda // Prikladnaya matematika i tekhnicheskaya fizika, 2008, vol. 49, no. 1, pp. 139–147.

11. Akhtyamov A.M., Shagiev V.R. Identifikacziya neuprugikh vidov zakreplenij truboprovodov // Vestnik Bashkirskogo universiteta, 2016, vol. 21, no. 1, pp. 21–25.

12. Vibraczii v tekhnike: Spravochnik. Kolebaniya linejnykh system / Pod red. V.V. Bolotina, Mashinostroenie, 1978, vol. 1, 352 p.

DETERMINATION OF TYPES OF FIXING THE ROD BY NATURAL FREQUENCIES OF VIBRATIONS

© A.A. Aitbaeva

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Centre
of the Russian Academy of Sciences,
71, prospekt Oktybrya, 450054, Ufa, Russian Federation

Rods can be fixed in different ways. In practice, under the influence of external factors, the boundary conditions at the ends of the rod may be violated. Therefore, it is important to solve the problems of determining the type and parameters of fastening the rod. The problem of determining the type of fixing the ends of the rod by the natural frequencies of vibration is considered. It is believed that on the left and right ends of the rod can only be types of fixing: clamped, pinned, roller, free end. Combinations of these fixing of rod give 16 types of boundary conditions: clamped – clamped, clamped – pinned, clamped – roller, clamped – free end, pinned – clamped, pinned – pinned, pinned – roller, pinned – free end, roller – clamped, roller – pinned, roller – roller, roller – free end, free end – clamped, free end – pinned, free end – roller, free end – free end. It is shown that by one eigen frequency of vibration of the rod and knowing the presence of the «zero» eigen frequency, it is possible to restore the type of fixing at the ends of the rod. The «zero» eigen frequency is the zero eigenvalue of the corresponding eigenvalue problem. The use of the first natural frequency is due to a smaller error in solving the problem.

Key words: eigen frequencies, eigenvalues, rod, boundary conditions.