

УДК 523.11

DOI: 10.31040/2222-8349-2022-0-1-47-51

**ВЛИЯНИЕ ЗАРЯДА В ЧЕРНОЙ ДЫРЕ БАРДИНА
НА ЗАДЕРЖКУ ВРЕМЕНИ ПРИБЫТИЯ СИГНАЛОВ**

© Г.Ю. Тулеганова

Исследовано влияние заряда на задержку времени прибытия сигналов, вызванной эффектом увлечения инерциальных систем отсчета. Этот эффект может возникнуть в астрофизических системах, где один из компаньонов двойной системы излучает переменный электромагнитный сигнал. Переменный сигнал, проходя по обе стороны вращающегося объекта в экваториальной плоскости, приходит к наблюдателю в разное время: быстрее со стороны вращения объекта и медленнее со стороны, противоположной вращению. В качестве вращающегося объекта рассматривается сферически-симметричная модель регулярной черной дыры Бардина, которая, помимо массы M и параметра вращения a , имеет дополнительный параметр g . Этот параметр связан с источником, описываемым нелинейной электродинамикой, и при $g = 0$ метрика Бардина сводится к метрике Керра. Рассматривая эффект в реалистичной конечной линзируемой системе, была рассчитана задержка времени прибытия сигналов до третьего порядка в приближении тонкой линзы. Задержка времени прибытия сигналов в черной дыре Бардина рассматривается в сравнении с черной дырой с зарядом Керра–Ньюмана. Примечательно, что влияние электрического заряда на задержку времени в черной дыре Керра–Ньюмана проявляется во втором и третьем порядке, а влияние заряда в черной дыре Бардина – только в третьем порядке. Вклад задержки времени прибытия ведущего порядка при возможностях современного оборудования принципиально измерим, однако влияние заряда проявляется только в третьем порядке, поэтому данное исследование представляет скорее академический интерес, нежели практический. Для двойной системы пульсар–черная дыра Лебедь X-1 были проведены численные оценки значения и сведены в таблицу. Порядок величин в третьем порядке, где проявляется влияние заряда, одинаковый. В отличие от влияния свободных параметров на задержку времени прибытия сигналов ранее изученных решений для черных дыр, при увеличении значения заряда задержка времени прибытия сигналов уменьшается.

Ключевые слова: Задержка времени прибытия сигналов, черная дыра Бардина.

Введение. Задержка времени прибытия сигналов (ЗВП) в приближении тонкой линзы впервые была рассмотрена в работе Измаилова и других [1] в пространстве-времени Йохансена для проверки теоремы «об отсутствии волос». ЗВП – это потенциальная наблюдаемая величина, вызванная эффектом увлечения инерциальных систем отсчета вращающейся линзой. Два световых сигнала, одновременно исходящих от источника за вращающейся линзой, приходят к наблюдателю с разницей во времени. ЗВП, по-другому называемая относительной или релятивистской задержкой, полностью отличается от хорошо известной гравитационной задержки Шапиро, в которой два значения времени складываются и усредняются, тогда, как в ЗВП время прохождения света вычитается. ЗВП впервые было вычислено в нулевом порядке Лагуной и Вольшаном для метрики Керра для неко-

торых гипотетических двойных систем. ЗВП с успехом применяется для исследования влияния свободных параметров метрик черных дыр в астрофизических масштабах [2, 3], в т.ч. электрического заряда [4].

ЗВП можно представить в следующем виде: два луча света исходят из источника S , находящегося за вращающейся линзой L (с массой M), проходят по обе стороны от линзы с разным временем прибытия в наблюдателе O (рис. 1). Разница во времени вызвана увлечением инерциальных систем отсчета из-за вращения линзы, что, в свою очередь, приводит к разнице в длине пути света, которая короче в направлении вращения и длиннее в направлении, противоположном вращению линзы. Рассматривая вращающуюся черную дыру в качестве компаньона двойной системы пульсар – черная дыра, получим оптимальную лаборато-

рию для проверки предсказаний по задержке времени.

Основываясь на идее Сахарова [5] и Глинера [6], Бардин разработал первую в истории статическую сферически-симметричную модель регулярной черной дыры в 1968 г. Он изучал коллапс заряженной материи с отталкивающим ядром де Ситтера, вместо сингулярности, внутри черной дыры. Регулярность решения означает, что при фиксированном значении нелинейных параметров инварианты кривизны пространства-времени конечны всюду, в т.ч. в начале координат, $r = 0$, при условии выполнения условия предельной кривизны. ЧД Бардина помимо массы M и параметра вращения a , включает в себя имеет дополнительный параметр g . Этот параметр возникает из-за заряда вследствие нелинейной электродинамики, и сводится к метрике Керра при $g = 0$. В данной работе исследуется влияние заряда на эффект задержки времени прибытия сигналов.

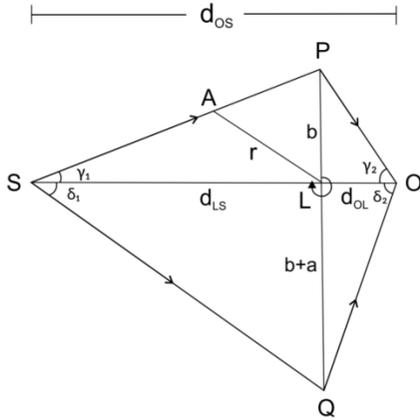


Рис. 1. Типичная схема тонкой линзы. S, L и O – источник, линза и наблюдатель, соответственно выровненные по прямой линии ($\beta = 0$), b – прицельный параметр, a – параметр вращения

Общий вид уравнения задержки времени прибытия сигналов. Чтобы вывести уравнение для ЗВП, рассмотрим общий вид метрики вращающейся ЧД. Линейный элемент ЧД с массой M и угловым моментом вращения $J = aM$ имеет вид:

$$d\tau^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi - g_{rr}dr^2 - g_{\theta\theta}d\theta^2 - g_{\phi\phi}d\phi^2. \quad (1)$$

Мы предполагаем, что световые лучи исходят от источника, находящегося позади вращающейся ЧД. Таким образом, нулевая траектория на экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2$) определяется как $d\tau_2 = 0$, так что время, необходимое для световых лучей вдоль бесконечно

малой нулевой мировой линии, определяется как

$$dt_{\pm} = \frac{d\phi}{g_{t\phi}} [-g_{t\theta} \pm h(r, \phi)], \quad (2)$$

где

$$h(r, \phi) = \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{tt} \left\{ g_{rr} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + g_{\phi\phi}^2 \right\}}. \quad (3)$$

Предположим, что для обеих \pm сторон линзы, которые определяют $d\phi > 0$, координатное время будет положительным для световых лучей, проходящих линзу со стороны, вращающейся совместно (+), и $d\phi < 0$ для стороны, вращающейся в противоположную сторону (–), поэтому оба значения dt_+ и dt_- положительны. ЗВП обоих лучей света на Земле также больше нуля:

$$dt = dt_- - dt_+ = \frac{|d\phi|}{g_{t\phi}} [g_{t\phi} + h(r, \phi)] - \frac{|d\phi|}{g_{t\phi}} [g_{t\phi} - h(r, \phi)] = \frac{2g_{t\phi}}{g_{t\phi}} [d\phi]. \quad (4)$$

Эта задержка dt появляется за счет эффекта увлечения инерциальных систем отсчета, которая определяется членом уравнения $\left(\frac{2g_{t\phi}}{g_{tt}}\right)$. Чтобы наблюдать ЗВП, необходимо соблюсти условие: источник, линза и наблюдатель должны располагаться на одной линии, т.е. они должны быть идеально выровнены, как показано на рис. 1. В случае если линза не вращается, длины пройденных путей световых лучей с обеих сторон линзы будут одинаковыми, то есть наблюдатель не сможет увидеть разницу во времени прибытия. Пройденный путь будет отличаться, только когда линза вращается – короче со стороны совместного вращения и длиннее со стороны противоположного вращения. Это и приводит к эффекту ЗВП. Лучи на экваториальной плоскости должны проходить через слабое поле, поэтому применяется приближение тонкой линзы, т.е. лучи света проходят по обе стороны от вращающейся линзы при больших r , обеспечивая для данной линзы с массой M и параметром вращения a , выполнение условия $(M/r) \ll 1$.

Применив общую формулу (2) к ЧД Керра, разложив $\left(\frac{2g_{t\phi}}{g_{tt}}\right)$ так, что в первом порядке по a и до третьего ППН порядка по (M/r) , он дает:

$$|dt| = |d\phi| \left(\frac{1}{c} \right) \left[\frac{4aM}{r} \xi_1 + \frac{2aM^2}{r^2} \xi_2 + \frac{8aM^3}{r^3} \xi_3 \right], \quad (5)$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 – это параметры отклонения от метрики Керра для модифицированных теорий гравитаций.

Общая задержка Δt между двумя световыми лучами, идущими от источника к наблюдателю вдоль двух противоположных сторон вращающейся линзы, составляет

$$t = \left(\frac{1}{c}\right) \int_0^\pi d\phi \left[\frac{4aM}{r} \lambda_1 + \frac{2aM^2}{r^2} \lambda_2 + \frac{8aM^3}{r^3} \lambda_3 \right] \\ \equiv \frac{1}{c} (I_1 + I_2 + I_3) = t_1 + t_2 + t_3. \quad (6)$$

Вычисление интеграла, в данном случае, необходимо для определения положения вращающейся линзы в начале полярной системы координат на экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2$). Далее необходимо получить явные выражения для $t_1, \Delta t_2$ и Δt_3 в приближении тонкой линзы на конечном расстоянии. Алгоритм расчета $\Delta t_1, \Delta t_2$ и Δt_3 приведен в источнике [1].

Задержка времени прибытия в пространстве-времени Бардина. Метрика Бардина в координатах Бойера–Линдквиста представлена в виде [7]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m(r)r}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4m(r)ar \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi dt + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + A d\phi^2, \quad (7)$$

где

$$m(r) = M \left(\frac{r^2}{r^2 + g^2}\right)^{3/2}, \\ \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta = r^2 + a^2 - 2m(r), \\ A = r^2 + a^2 + \frac{2m(r)ra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}. \quad (8)$$

M и a – масса и угловой момент вращения черной дыры соответственно, g – свободный параметр, обозначающий заряд.

Применим общие формулы (1)–(6) к ЧД Бардина, разложив $\left(\frac{2g_t\phi}{gt}\right)$ в первом порядке по a и до третьего ППН порядка по (M/r) , получим:

$$|dt|^{Bar} = |d\phi| \left(\frac{1}{c}\right) \left[\frac{4aM}{r} \left\{1 + \frac{2M}{r} + \frac{M^2}{2r^2} \zeta\right\} \right], \quad (9)$$

где параметр отклонения равен

$$\zeta = 1 - \frac{3g^2}{M^2}. \quad (10)$$

Для ЧД Керра–Ньюмана аналогично получаем:

$$|dt|^{KN} = |d\phi| \left(\frac{1}{c}\right) \left[\frac{4aM}{r} \left\{1 + \frac{2M}{r} \xi_1 + \frac{M^2}{2r^2} \xi_2\right\} \right], \quad (11)$$

где

$$\xi_1 = 1 - \frac{Q^2}{4M^2}, \quad \xi_2 = 8 - \frac{4Q^2}{M^2}. \quad (12)$$

Рассчитаем $\Delta t_1, \Delta t_2$ и Δt_3 в приближении тонкой линзы следуя алгоритму, приведенному в [1], учитывая, что вращающаяся линза находится в начале полярной системы координат на экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2$). Действия включают интегрирование по частям типичных прямых нулевых траекторий в соответствующи-

щих секторах – вдоль вращения $\left(\frac{1}{r_{cor}}\right)$ и противоположному вращению $\left(\frac{1}{r_{cou}}\right)$. Окончательный результат получаем, вычитая интегралы по длине пути, а именно, $SQO - SPO$:

$$\Delta t_1^{Bar} = \frac{I_1}{c} = \frac{8aM\{\chi[a(b+d_{OL})+b(b+2d_{OL})]-b(a+b)\}}{b(a+b)c\chi d_{OL}}, \quad (13)$$

Таким же образом мы можем вычислить интегралы I_2 и I_3 , которые, в ведущих порядках в $\left(\frac{M}{b}\right)^2$ и $\left(\frac{M}{b}\right)^3$, приводят к:

$$\Delta t_2^{Bar} = \frac{I_2}{c} = \frac{4aM^2}{A_1(c\chi d_{OL})^2} [A_1\pi + A_2\chi d_{OL}(\chi - 1) + (A_1 + A_3 d_{OL}^2)\pi\chi^2], \quad (14)$$

$$\Delta t_3^{Bar} = \frac{I_3}{c} = \frac{2aM^3 \left[4 - \frac{4}{\chi^3} + B_1 + B_2 + B_3\right]}{3cd_{OL}^2} \zeta. \quad (15)$$

где

$$A_1 = b^2(a+b)^2, \quad (16)$$

$$A_2 = 2b(a+b)(a+2b), \quad (17)$$

$$A_3 = a^2 + 2ab + 2b^2, \quad (18)$$

$$B_1 = \frac{4d_{OL}^3}{b^3} + \frac{4d_{OL}^3}{(a+b)^3}, \quad (19)$$

$$B_2 = \frac{3d_{OL}^2(\chi-1)}{\chi b^2} + \frac{3d_{OL}^2(\chi-1)}{\chi(a+b)^2}. \quad (20)$$

$$B_3 = \frac{3d_{OL}^2(\chi^2+1)}{\chi b^2} + \frac{3d_{OL}^2(\chi^2+1)}{\chi^2(a+b)}. \quad (21)$$

Уравнения (13)–(21) – итоговые компоненты ЗВП сигналов в пространстве-времени ЧД Бардина.

Для сравнения вычислим компоненты для решения черной дыры Керра–Ньюмана:

$$\Delta t_1^{KN} = \frac{I_1}{c} = \frac{8aM\{\chi[a(b+d_{OL})+b(b+2d_{OL})]-b(a+b)\}}{b(a+b)c\chi d_{OL}}, \quad (22)$$

$$\Delta t_2^{KN} = \frac{I_2}{c} = \frac{4aM^2}{A_1(c\chi d_{OL})^2} [A_1\pi + A_2\chi d_{OL}(\chi - 1) + (A_1 + A_3 d_{OL}^2)\pi\chi^2] \xi_1, \quad (23)$$

$$\Delta t_3^{KN} = \frac{I_3}{c} = \frac{2aM^3 \left[4 - \frac{4}{\chi^3} + B_1 + B_2 + B_3\right]}{3cd_{OL}^2} \xi_2. \quad (24)$$

Эффект задержки времени прибытия первого порядка в ЧД Бардина и Керра–Ньюмана не зависит от свободных параметров $\Delta t_1^{Bar} = \Delta t_1^{KN} = \Delta t_1^{Kerr}$. Очевидно также, что $\Delta t_2^{Bar} = \Delta t_2^{Kerr}$. Ситуация существенно отличается в задержке времени третьего порядка, компоненты ЗВП для обеих метрик отличаются от метрики Керра.

Для двойной системы пульсар–черная дыра Лебедь X-1 подставим значения параметров линзы a, M , значения расстояния $b, d_{OL}, \chi = d_{LS}/d_{OL}$ в приведенные выше уравнения, сохранив малые значения углов $b/d_{OL}, b/d_{LS} \ll 1$, и составим таблицу компонентов $\Delta t_1, \Delta t_2$ и Δt_3 .

Некоторые типичные значения компонент Δt_1 , Δt_2 и Δt_3 для двойной системы пульсар–Лебедь X-1 в пространстве-времени черной дыры Керра–Ньюмана

Q/M	χ	Δt_1 , мкс	Δt_2^{KN} , мкс	Δt_3^{KN} , мкс
0	0.1	2.82	1.12×10^{-7}	4.81×10^{-15}
0.1	0.1	2.82	1.11×10^{-7}	4.79×10^{-15}
0.2	0.1	2.82	1.11×10^{-7}	4.71×10^{-15}
0.317	0.1	2.82	1.09×10^{-7}	4.57×10^{-15}
0.5	0.1	2.82	1.05×10^{-7}	4.21×10^{-15}
0.7	0.1	2.82	0.98×10^{-7}	3.63×10^{-15}
1	0.1	2.82	0.84×10^{-7}	2.40×10^{-15}

Примечание. Последние два столбца табл. 1 содержат влияние отношения Q/M . Значения для ЧД Керра даны при $Q = 0$ (первая строка).

Некоторые типичные значения компонент Δt_1 , Δt_2 и Δt_3 для двойной системы пульсар–Лебедь X-1 в пространстве-времени ЧД Бардина

q/M	χ	Δt_1 , мкс	Δt_2 , мкс	Δt_3^{Bar} , мкс
0	0.1	2.82	5.60×10^{-8}	1.20×10^{-15}
0.2	0.1	2.82	5.60×10^{-8}	1.05×10^{-15}
0.4	0.1	2.82	5.60×10^{-8}	6.25×10^{-16}
0.6	0.1	2.82	5.60×10^{-8}	-9.62×10^{-17}
0.8	0.1	2.82	5.60×10^{-8}	-1.10×10^{-15}
1	0.1	2.82	5.60×10^{-8}	-2.40×10^{-15}

Оценка численных значений и выводы.

Рассмотрим типичный пример двойной системы пульсар – Лебедь X-1. Значения параметров черной дыры a , M и d_{OL} взяты из [8]. Радиуса фотонной сферы Керра должно быть достаточно и из двух значений $r_{ph}^- = 8.72 \times 10^6$ см и $r_{ph}^+ = 3.05 \times 10^6$ см, r_{ph}^- больше двух радиусов. Соответственно, чтобы сохранить приближение тонкой линзы и ППН, выберем $b = 10^2 r_{ph}^- = 8.72 \times 10^8$ см, так что $\frac{M}{b} = 10^{-3}$. Расстояния линза-источник $d_{LS} = \chi d_{OL}$ на рис. 1 варьируются путем изменения χ , но с сохранением требуемой малости углов (в радианах): $\gamma_1 \approx b/d_{LS}$, $\delta_1 \approx (a + b)/d_{LS}$, $\gamma_2 \approx b/d_{OL}$, $\delta_2 \approx (a + b)/d_{OL}$.

В отличие от ЧД Керра–Ньюмана, задержка времени прибытия сигналов для ЧД Бардина проявляется только в третьем порядке (табл. 2). Заметим, что при значениях приведенного безразмерного заряда q/M больше

0.5 значения Δt_3^{Bar} принимают отрицательные значения. Однако мы рассматриваем только относительную ЗВП, поэтому его знак не имеет значения.

Компонента ЗВП Δt_1 имеет порядок микросекунд, даже когда прицельный параметр b в сто раз дальше, чем r_{ph}^+ . Такой порядок задержки времени можно будет измерить в ближайшем будущем. Другие компоненты в таблице, которые содержат Q/M для ЧД Керра–Ньюмана и q/M для ЧД Бардина, не могут быть измеримыми даже в далеком будущем, а скорее представляют академический интерес. Порядок величин в третьем порядке, где проявляется влияние и приведенного безразмерного заряда, одинаковый. В отличие от влияния свободных параметров на задержку времени прибытия сигналов ранее изученных решений для черных дыр, при увеличении значения заряда задержка времени прибытия сигналов уменьшается.

Литература

1. Izmailov R.N., Zhdanov E.R., Bhadra A. et al. Relative time delay in a spinning black hole as a diagnostic for no-hair theorem // *Eur. Phys. J.* 2019. V. 79. 105 p.
2. Tuleganova G.Y., Izmailov R.N., Karimov R.Kh., Nandi K.K. Can a regular black hole be observationally distinguished from singular black holes as spinning lens partner in PSR-BH binaries? // *J. Astrophys. Astr.* 2021. V. 42. 79 p.
3. Tuleganova G.Y., Muhamadieva L.Y. Relative time delay in Bumblebee gravity // *Astrophys Space Sci.* 2021. V. 366. 8 p.
4. Tuleganova G.Y., Izmailov R.N., Karimov R.Kh., Potapov A. A., Nandi K. K. Times of arrival (TOA) of signals in the Kerr-MOG black hole // *General Relativity and Gravitation.* 2020. V. 52. P. 1–17.
5. Sakharov A.D. The Initial Stage of an Expanding Universe and the Appearance of a Nonuniform Distribution of Matter // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics.* 1966. V. 49. P. 345–358.
6. Gliner E. B. Algebraic Properties of the Energy-momentum Tensor and Vacuum-like States of Matter // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics.* 1966. V. 22. 378 p.
7. Bardeen J.M. Non-singular general-relativistic gravitational collapse // in *Proceedings of International Conference GR5, Tbilisi, USSR.* 1968. 174 p.
8. Faucher-Giguere C.A., Loeb A. Pulsar-Black Hole Binaries in the Galactic Center // *Mon. Not. Roy Astron. Soc.* 2011. V. 415. 3951 p.



AN IMPACT OF BARDEEN BLACK HOLE CHARGE ON TIMES OF ARRIVAL OF SIGNALS

© G.Yu. Tuleganova

Akmullah Bashkir State Pedagogical University,
3a, ulitsa Oktyabrskoy revolyutsii, 450008, Ufa, Russian Federation

In this paper we consider an impact of Bardeen black hole charge on times of arrival of signals on the time delay caused by frame-dragging effect. This effect can arise in astrophysical systems, where one of the companions of the binary system emits a variable electromagnetic signal. A variable signal travels on both sides of a rotating object in the equatorial plane. We consider a spherically symmetric regular black hole by Bardeen as a rotating object, which has a deviation parameter g besides mass M and spin a . This parameter is related to the described nonlinear electrodynamics, and the Bardeen metric reduces to the Kerr metric when $g = 0$. We investigate times of arrival of signals effect in a realistic final lens system in a Bardeen black hole compared to a Kerr–Newman black hole. It is noteworthy that an influence of electric charge on the time delay in the Kerr–Newman black hole appears in the second and third orders, and an influence of the charge in the Bardeen black hole only in the third order. The contribution of the leading-order time delay with the capabilities of modern equipment is fundamentally measurable, however, the influence of the charge manifests itself only in the third, therefore, this study is more of academic interest than practical. For the binary system pulsar – black hole Cygnus X-1, numerical values were tabulated.

Key words: signal arrival time delay, Bardeen's black hole.