

УДК 524.882

DOI: 10.31040/2222-8349-2022-0-1-41-46

**СВОЙСТВА ОТРАЖАТЕЛЬНО-АССИМЕТРИЧНЫХ КРОВОТЫХ НОР  
С НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ЗАРЯДОМ**

© Г.Ф. Ахтарьянова, Э.Э. Айгишева, Р.Н. Измаилов

В работе исследована модель кротовой норы, полученная соединением пространства-времени Бардина массы  $M_-$  и заряда  $Q$  с одной стороны и пространства-времени Шварцшильда массы  $M_+$  с другой стороны. Эти объекты являются сферически симметричными по форме, но не отражательно-симметричными, поскольку связанные пространства-времена различаются. Отражательно-асимметричные кротовые норы могут отражать значительную часть падающего излучения обратно в пространство-время, в котором оно возникло. Ранее этот эффект был рассмотрен в рамках эффективного фотонного потенциала. В зависимости от параметров модели изображение такой кротовой норы, видимое удаленным наблюдателем (ее «тень»), может содержать фотонное кольцо, сформированное на стороне наблюдателя, и фотонное кольцо, сформированное на другой стороне кротовой норы, или оба фотонных кольца. Эти уникальные топологические особенности позволяют нам четко отличить этот класс объектов от черных дыр с помощью радиоастрономических наблюдений.

Ключевые слова: кротовая нора; тонкая оболочка; нелинейный электромагнитный заряд; отражательно-асимметричные объекты.

**Введение.** Кротовые норы – это гипотетические объекты с нетривиальной топологией в общей теории относительности [1, 2]. Общая теория относительности (ОТО) допускает существование кротовых нор, наряду с черными дырами. Вопрос проходимости кротовых нор впервые был исследован Моррисом и Торном в работе [1], где они показали, что энергетические условия материи нарушаются, по крайней мере, в горловине статических и сферически-симметричных кротовых нор в ОТО без космологической постоянной. На сегодняшний день существует множество работ, которые показывают, что кротовые норы могут имитировать черные дыры, потому что они могут иметь сильные гравитационные поля [3]. Например, сферически-симметричные кротовые норы с сильными гравитационными полями могут иметь неустойчивые (устойчивые) круговые световые орбиты, называемые фотонными сферами (антифотонными сферами) [4].

Кротовая нора с тонкой оболочкой, энергетические условия материи которой нарушаются

только в горловине, рассматривалась Виссером [2] с сопоставлением метода Дармуэ–Израэля [5]. Устойчивость к линейным возмущениям тонкой оболочки кротовой норы Шварцшильда была исследована Пуассоном и Виссером [6]. На сегодняшний день эта тема широко изучается и для других кротовых нор с тонкой оболочкой как при линейных [7–8], так и при нелинейных возмущениях [9].

Обычно для создания кротовых нор с тонкой оболочкой используются два скопированных многообразия. Было бы трудно отличить отражательно-симметричное пространство-время кротовой норы, построенное с помощью соединения частей скопированного пространства-времени черной дыры, от исходного пространства-времени черной дыры с помощью астрономических наблюдений, если кротовая нора имеет фотонные сферы и если на другой стороне пространства от горловины мало источников света.

Исследований по отражательно-асимметричным кротовым норам с тонкими оболочками,

АХТАРЬЯНОВА Гульназ Фанисовна, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, e-mail: Akht\_gul@mail.ru

АЙГИШЕВА Элина Эдуардовна, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, e-mail: aigisheva.elina@yandex.ru

ИЗМАИЛОВ Рамиль Наильевич – к.ф.-м.н, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, e-mail: izmailov.ramil@gmail.com

таких как в работах [10–12], было немного. Недавно Ван и др. изучили тень от отражательно-асимметричной кротовой норы с тонкой оболочкой, которая состоит из частей двух пространств-времени Шварцшильда с разными массами [10]. Вейглас и др. построили отражательную асимметричную кротовую нору с тонкой оболочкой, путем сшивки пространства-времени Шварцшильда с фотонной сферой и пространства-времени Рейсснера–Нордстрема с другой фотонной сферой, и обсудили наблюдаемые свойства тени [11]. Авторы пришли к выводу, что тень от асимметричной кротовой норы имеет два фотонных кольца разных размеров, если смотреть со стороны наблюдателя, и назвали тень – двойной. Асимметричную кротовую нору с тонкой оболочкой с фотонными сферами можно отличить от черных дыр по наблюдениям, поскольку световые лучи могут отражаться от потенциальной стенки около горловины [11].

В этой статье исследуется устойчивость к линейным возмущениям отражательно-асимметричной кротовой норы с тонкой оболочкой, которая состоит из пространства-времени Шварцшильда и пространства-времени Бардина с двойной тенью. Пространство-время черной дыры Бардина характеризуется наличием нелинейного электромагнитного заряда, который в горловине кротовой норы может быть определен через массы обоих пространств-времен, как будет показано в работе.

**Пространство-время Бардина.** Лагранжиан метрики задается в виде [13]:

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \frac{3M}{Q^3} \left( \frac{\sqrt{2Q^2\mathcal{F}}}{1+\sqrt{2Q^2\mathcal{F}}} \right)^{5/2}, \quad (1)$$

где  $\mathcal{F} = \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}$ ,  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  – тензор электромагнитного поля,  $Q$  – электрический заряд и  $M$  – масса объекта. Асимптотически плоская метрика имеет вид

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2)$$

где

$$f(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2+Q^2)^{3/2}} \quad (3)$$

с соответствующим тензором электромагнитного поля  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ , заданным формулой

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = 2\delta_{[\mu}^{\theta}\delta_{\nu]}^{\psi}Q \sin\theta. \quad (4)$$

В случае, когда заряд  $Q = 0$ , метрика (3) сводится к метрике Шварцшильда. Параметр заряда  $Q$  первоначально интерпретировался как

электрический заряд, но позже был идентифицирован Айоном–Беато и Гарсиа [14] как представляющий магнитный монополь, связанный с нелинейной электродинамикой.

**Отражательно-асимметричные кротовые норы с тонкой оболочкой.** Для построения пространства-времени кротовой норы без симметрии отражения или симметрии  $Z_2$  будет использован метод Дармуэ–Израэля [5]. Рассмотрим сначала два многообразия  $\mathcal{M}_{\pm} \equiv \{r > a\}$ , где  $a$  – постоянная, удовлетворяющая условию  $a > r_{EH\pm}$ , в которых удалена внутренняя часть  $\Omega_{\pm} \equiv \{r \leq a\}$  из пространств-времен Бардина. Границы многообразий  $\mathcal{M}_{\pm}$  являются времениподобными гиперповерхностями  $\Sigma_{\pm} \equiv \{r = a\}$ , которые будут выбраны таким образом, чтобы  $\Sigma = \Sigma_+ = \Sigma_-$ . В результате склеивания многообразий  $\mathcal{M}_+$  и  $\mathcal{M}_-$  в горловине  $a$ , находящейся на  $\Sigma$ , получаем единое многообразие  $\mathcal{M}$ . Гиперповерхность  $\Sigma$  заполнена веществом распределения Дирака и называется тонкой оболочкой. Допустим, что  $a = a(\tau)$ , где  $\tau$  – собственное время тонкой оболочки, поскольку нас интересует устойчивость тонкой оболочки  $\Sigma$ .

Линейные элементы в областях  $\mathcal{M}_{\pm}$  имеют вид

$$ds_{\pm}^2 = -f_{\pm}(r)dt_{\pm}^2 + \frac{dr^2}{f_{\pm}(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5)$$

где

$$f_{\pm}(r) = 1 - \frac{2M_{\pm}r^2}{(r^2+Q_{\pm}^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

Отметим, что временные координаты  $t_{\pm}$  разрывны на гиперповерхности  $\Sigma$ , в то время как координаты  $r$ ,  $\theta$  и  $\phi$  непрерывны на гиперповерхности  $\Sigma$ .

Предположим, что можно задать координаты  $y^i = (\tau, \theta, \phi)$  на обе стороны от  $\Sigma$ . Пусть тонкая оболочка находится в точке  $t_{\pm} = T_{\pm}(\tau)$  и  $r = a(\tau)$ . Векторы единичных нормалей тонких оболочек принимают вид

$$n_{\mu\pm} dx_{\pm}^{\mu} = \pm(-\dot{a}dt_{\pm} + \dot{T}_{\pm}dr), \quad (7)$$

где точка – дифференцирование по  $\tau$ . Четырехскорость тонкой оболочки задаются выражением  $u_{\pm}^{\mu}\partial_{\mu\pm} = \dot{T}_{\pm}\partial_{t_{\pm}} + \dot{a}\partial_r$ . Из нормировки четырехскорости  $u_{\pm}^{\mu}u_{\mu\pm} = 1$ , следует

$$f_{\pm}(a)\dot{T}_{\pm}^2 - \frac{\dot{a}^2}{f_{\pm}(a)} = 1. \quad (8)$$

Решая уравнение (8) относительно  $\dot{T}_{\pm}$ , получаем

$$\dot{T}_{\pm} = \frac{\sqrt{f_{\pm} + \dot{a}^2}}{f_{\pm}}. \quad (9)$$

Используя уравнение (8) и базисные векторы  $e_{i\pm}^{\mu} \equiv \partial x_{\pm}^{\mu} / \partial y^i$ , заданные формулами

$$e_{\tau\pm}^{\mu} \partial_{\mu\pm} = \dot{T}_{\pm} \partial_{t\pm} + a \partial_r, \quad (10)$$

$$e_{\theta\pm}^{\mu} \partial_{\mu\pm} = \partial_{\theta}, \quad (11)$$

$$e_{\phi\pm}^{\mu} \partial_{\mu\pm} = \partial_{\phi}, \quad (12)$$

индуцированная метрика  $h_{ij\pm} \equiv g_{\mu\nu\pm} e_{i\pm}^{\mu} e_{j\pm}^{\nu}$  на гиперповерхности  $\Sigma$  в  $\mathcal{M}_{\pm}$  имеет вид

$$ds_{\Sigma}^2 = ds_{\pm}^2|_{\Sigma} = h_{ij\pm} dy^i dy^j = -d\tau^2 + a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (13)$$

Из уравнения (13) следует, что метрика на гиперповерхности  $\Sigma$  одинакова, если смотреть с обеих сторон.

Тонкая оболочка должна удовлетворять уравнениям Эйнштейна

$$S_j^i = -\frac{1}{8\pi} ([K_j^i] - [K]\delta_j^i), \quad (14)$$

где скобка  $[F]$  обозначает скачок любой функции  $F$  через  $\Sigma$ ,

$$[F] \equiv F_+|_{\Sigma} - F_-|_{\Sigma}, \quad (15)$$

где  $F_+$  и  $F_-$  представляют собой  $F$  в  $\mathcal{M}_+$  и  $\mathcal{M}_-$  соответственно.  $S_j^i$  – поверхностный тензор энергии-импульса тонкой оболочки, задаваемый формулой

$$S_j^i = (\sigma + p)U^i U_j + p\delta_j^i, \quad (16)$$

где  $U_i$  определяется выражением  $U_i dy^i \equiv u_{\mu\pm} e_{i\pm}^{\mu} dy^i = -d\tau$ ,  $\sigma = -S_{\tau}^{\tau}$  – поверхностная плотность энергии и  $p = S_{\phi}^{\phi} = S_{\theta}^{\theta}$  – поверхностное давление тонкой оболочки. Уравнение внешней кривизны  $K_{ij}$  в этом случае задается в виде

$$K_{ij} \equiv n_{\mu;\nu} e_i^{\mu} e_j^{\nu}, \quad (17)$$

где символ «;» означает ковариантную производную. При использовании нормальных векторов (7) уравнения внешней кривизны гиперповерхностей в  $\mathcal{M}_{\pm}$  определяются выражениями

$$K_{\tau\pm}^{\tau} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\dot{a}^2 + f_{\pm}}} \left( \ddot{a} + \frac{f'_{\pm}}{2} \right), \quad (18)$$

$$K_{\theta\pm}^{\theta} = K_{\phi\pm}^{\phi} = \frac{\pm \sqrt{\dot{a}^2 + f_{\pm}}}{a}, \quad (19)$$

и следы функций получаются как

$$K_{\pm} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\dot{a}^2 + f_{\pm}}} \left( \ddot{a} + \frac{f'_{\pm}}{2} \right) \pm \frac{2}{a} \sqrt{\dot{a}^2 + f_{\pm}}. \quad (20)$$

Из компонент  $(\tau, \tau)$  и  $(\theta, \theta)$  уравнений Эйнштейна (14) получаем

$$\sigma = -\frac{\sqrt{\dot{a}^2 + f_+}}{4\pi a} - \frac{\sqrt{\dot{a}^2 + f_-}}{4\pi a}, \quad (21)$$

и

$$p = \frac{1}{8\pi\sqrt{\dot{a}^2 + f_+}} \left( \ddot{a} + \frac{\dot{a}^2 + f_+}{a} + \frac{f'_+}{2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{8\pi\sqrt{\dot{a}^2 + f_-}} \left( \ddot{a} + \frac{\dot{a}^2 + f_-}{a} + \frac{f'_-}{2} \right), \quad (22)$$

а затем из уравнений (21) и (22), вычисляем

$$\frac{d(\sigma\mathcal{A})}{d\tau} + p \frac{d\mathcal{A}}{d\tau} = 0, \quad (23)$$

где  $\mathcal{A} = 4\pi a^2$  – площадь горловины. Уравнение (23) можно выразить следующим образом:

$$a\sigma' + 2(\sigma + p) = 0, \quad (24)$$

где штрих означает дифференцирование по  $a$  и  $\sigma' = \dot{\sigma}/\dot{a}$ . Предположим, что тонкая оболочка заполнена баротропной жидкостью с  $p = p(\sigma)$ . Из уравнения (24) заметим, что поверхностная плотность баротропной жидкости выражается как функция от  $a$  или  $\sigma = \sigma(a)$ . Используя уравнение (17), уравнение движения тонкой оболочки задается в виде

$$\dot{a}^2 + V(a) = 0, \quad (25)$$

где  $V(a)$  – эффективный потенциал, определяемый формулой

$$V(a) \equiv \bar{f} - \left( \frac{\Delta}{4\pi a \sigma} \right)^2 - (2\pi a \sigma)^2. \quad (26)$$

Функции  $\bar{f}$  и  $\Delta$  задаются формулами

$$\bar{f} \equiv \frac{f_- + f_+}{2}, \quad (27)$$

$$\Delta \equiv \frac{f_+ - f_-}{2}. \quad (28)$$

Производная  $V$  по  $a$  имеет вид

$$V' = \bar{f}' - \frac{\Delta[\Delta' a \sigma - \Delta(a\sigma')]}{8\pi^2 a^3 \sigma^3} - 8\pi^2 a \sigma (\sigma + a\sigma'), \quad (29)$$

и, используя уравнения (24), его можно переписать в виде

$$V' = \bar{f}' - \frac{\Delta[\Delta' a \sigma - \Delta(\sigma + 2p)]}{8\pi^2 a^3 \sigma^3} - 8\pi^2 a \sigma (\sigma + 2p). \quad (30)$$

Используя уравнение (24), получим вторую производную  $V$  по  $a$ , которая имеет вид

$$V'' = \bar{f}'' - \frac{\Delta'^2}{8\pi^2 a^2 \sigma^2} - \frac{\Delta}{8\pi^2 a^4 \sigma^4} \left[ 4\Delta'(\sigma + 2p)a\sigma + \Delta'' a^2 \sigma^2 - 2\Delta\sigma(\sigma + p)(1 + 2\beta^2) + 3\Delta(\sigma + 2p)^2 \right] - 8\pi^2 \left[ (\sigma + 2p)^2 + 2\sigma(\sigma + p)(1 + 2\beta^2) \right], \quad (31)$$

где  $\beta^2 \equiv dp/d\sigma = p'/\sigma'$ .

Здесь и далее в работе накладывается ограничение

$$f_+(a) = f_-(a), \quad (32)$$

и мы сконцентрируемся на случае, когда многообразии  $\mathcal{M}_-$  является частью пространства-времени черной дыры Шварцшильда, т.е.  $Q_- = 0$ . Тогда, из уравнения (32) можно получить ограничение на заряд  $Q_+$ , который имеет вид

$$Q_+^2 = a^2 (\xi^{2/3} - 1), \quad (33)$$

где  $\xi$  – параметр асимметрии, определяемый формулой  $\xi = M_+/M_-$ . Несимметричная по отражению кротовая нора с тонкой оболочкой с двойной тенью должна иметь горловину в областях  $r_{EH-} < a < r_{PS-}$  и  $r_{EH+} < a < r_{PS+}$ .

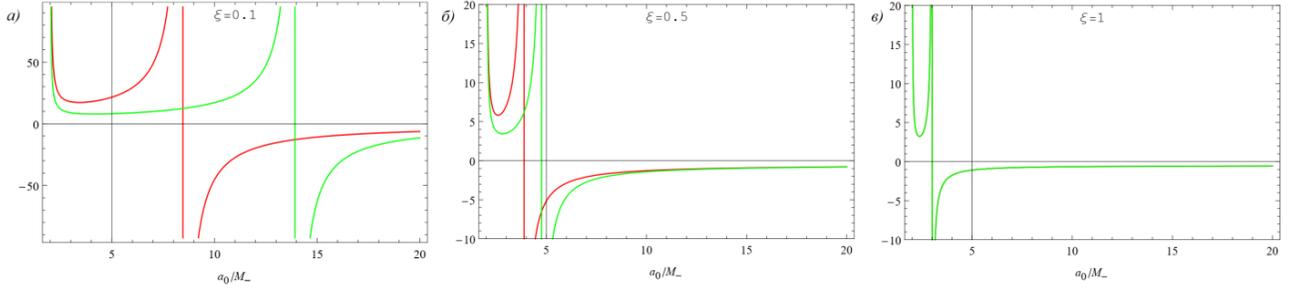


Рис. 1. Зависимость функции  $\beta_0^2$  (сплошная зеленая линия) и  $\zeta_0^2$  (сплошная красная линия) от безразмерного параметра  $a_0/M_-$  при  $\xi = 0.1$  (а),  $\xi = 0.5$  (б) и  $\xi = 1$  (в). Область стабильности определяется условиями (41) и (42)

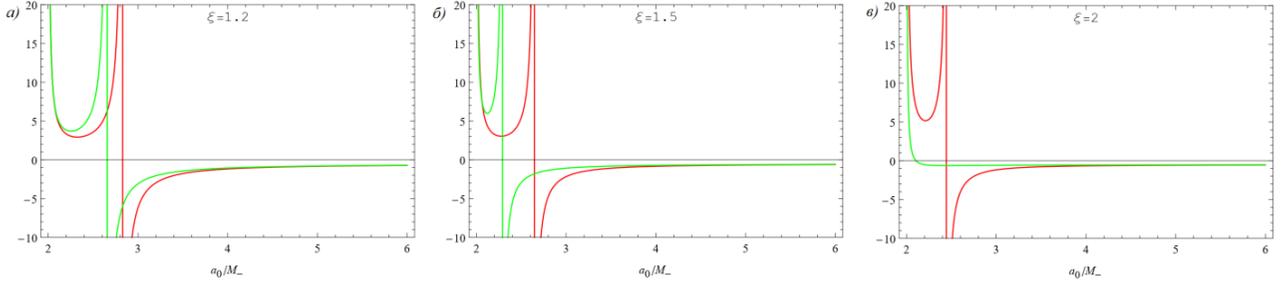


Рис. 2. Зависимость функции  $\beta_0^2$  (сплошная зеленая линия) и  $\zeta_0^2$  (сплошная красная линия) от безразмерного параметра  $a_0/M_-$  при  $\xi = 1.2$  (а),  $\xi = 1.5$  (б) и  $\xi = 2$  (в). Область стабильности определяется условиями (41) и (42)

**Стабильность тонкой оболочкой кротовой норы.** В работе рассматривается устойчивость статической кротовой норы с тонкой оболочкой при линейных возмущениях в точке  $a = a_0$  с учетом ограничения (32) и  $Q_- = 0$ . Поверхностная плотность энергии  $\sigma_0$  и давление  $p_0$  тонкой оболочки определяются выражениями

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{f_0}}{2\pi a_0}, \quad (34)$$

$$p_0 = \frac{1}{8\pi\sqrt{f_0}} \left( \frac{2f_0}{a_0} + \bar{f}_0' \right). \quad (35)$$

Здесь и далее в работе функция с индексом «0» означает функцию при  $a = a_0$ . Тогда, по определению, получим

$$\beta_0^2 \equiv dp_0/d\sigma_0 = p_0'/\sigma_0'. \quad (36)$$

Поскольку выполняется условие  $V_0 = V_0' = 0$ , эффективный потенциал можно разложить в точке  $a = a_0$  в следующем виде

$$V(a) = \frac{V_0''}{2} (a - a_0)^2 + O((a - a_0)^3), \quad (37)$$

где  $V_0''$  имеет вид

$$V_0'' = A_0 - B_0(1 + 2\beta_0^2), \quad (38)$$

$$A_0 \equiv \bar{f}_0'' - \frac{\Delta_0^2}{2f_0} - \frac{\bar{f}_0'^2}{2f_0}, \quad (39)$$

$$B_0 \equiv \frac{2f_0}{a_0^2} - \frac{\bar{f}_0'}{a_0}. \quad (40)$$

Тонкая оболочка устойчива (неустойчива), когда  $V_0'' > 0$  ( $V_0'' < 0$ ). Таким образом, из урав-

нения (38) следует, что тонкая оболочка устойчива при

$$\beta_0^2 < \zeta_0^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{B_0} - 1 \right) \text{ и } B_0 > 0 \quad (41)$$

или

$$\beta_0^2 > \zeta_0^2 \text{ и } B_0 < 0. \quad (42)$$

Граница  $B_0 = 0$  задается формулой

$$a_0/M_- = 3(1 + \xi^{-2/3})/2. \quad (43)$$

На границе тонкая оболочка неустойчива при любых значениях  $\beta_0^2$ .

Для исследования области устойчивости кротовой норы с тонкой оболочкой построим графики зависимости функций  $\beta_0^2$  и  $\zeta_0^2$  от безразмерного параметра  $a_0/M_-$  при разных значениях  $\xi$  (при  $\xi \leq 1$  на рис. 1,  $\xi > 1$  на рис. 2). Рассмотрим случай, когда параметр  $\xi = 0.1$ , для которого функция  $B_0 < 0$  при  $a_0/M_- < 8.46$ , в остальных случаях положительная. Согласно условиям (41) и (42) из рис. 1,  $a$  следует, что кротовая нора с тонкой оболочкой устойчива, когда радиус шивки  $a_0 > 13.92M_- = 139.2M_+$ . Отметим, что в этом случае радиус фотонной сферы, который равен  $3M_-$ , не попадает в устойчивую область. Таким образом, мы получили широкий спектр значений радиуса шивки  $a_0 \in [13.92M_-, \infty)$ , однако такая кротовая нора не будет иметь фотонные сферы. В случае, ко-

гда  $\xi = 0.5$ , для которого функция  $B_0 < 0$  при  $a_0/M_- < 3.88$ . В этом случае кротовая нора с тонкой оболочкой устойчива при  $a_0 > 4.75M_- = 9.5M_+$ . Отметим, что радиус фотонной сферы по прежнему не входит в устойчивую область. Из рис. 3, в видно, что при  $\xi = 1$  функции  $\beta_0^2$  и  $\zeta_0^2$  совпадают и, соответственно, представленные условия устойчивости для кротовых нор (41) и (42) не работают. В работе [15] было показано, что в этом случае кротовая нора является полностью неустойчивой.

Более интересный случай представлен на рис. 2. В отличие от предыдущих случаев, здесь мы видим, что кротовая нора с тонкой оболочкой является неустойчивой при  $a_0 > 3M_-$ . Область устойчивости в этом случае лежит в переделе от  $2M_-$  до  $3M_-$  и имеет сильную зависимость от параметра  $\xi$ . В случае, когда параметр  $\xi = 1.2$ , функция  $B_0 < 0$  при  $a_0/M_- < 2.83$ , а сама кротовая нора с тонкой оболочкой устойчива при  $a_0 \in (2M_-, 2.65M_-)$  или  $\in (1.67M_+, 2.21M_+)$ . Отметим, что в этом случае радиус сшивки кротовой норы является меньше радиуса фотонной сферы и, следовательно, эти фотонные сферы могут отражаться на обе стороны от горловины. Такие кротовые норы называются кротовыми норами с двумя тенями. При увеличении параметра  $\xi$  до 1.5, из рис. 2, б видно, что кротовая нора устойчива, когда радиус сшивки определен в промежутке  $a_0 \in (2M_-, 2.29M_-)$  или  $\in (1.33M_+, 1.53M_+)$ . При  $\xi = 2$  кротовая нора является полностью неустойчивой, как показано на рис. 2, в.

**Заключение.** В работе была исследована устойчивость к линейным возмущениям отражательно-асимметричной кротовой норы с тонкой оболочкой и двумя тенями, полученная путем сшивки пространства-времени Шварцшильда с одной стороны и пространства-времени Бардина с другой стороны. Показано, что в тонкой оболочке электрический заряд может быть представлен через радиус сшивки и массы черных дыр Шварцшильда и Бардина. Устойчивость кротовой норы к линейным возмущениям может быть проверена с помощью двух систем уравнений (41) и (42). Под областью устойчивости понимается область допустимых значений радиуса сшивки, при котором кротовая нора не схлопнется под действием линейных возмущений. В работе было показано, что область устойчивости кротовой норы с увеличением параметра  $\xi$

увеличивается при  $\xi < 1$  (случай, когда масса черной дыры Шварцшильда больше чем масса черной дыры Бардина) и уменьшается при  $\xi > 1$  (случай, когда масса черной дыры Шварцшильда меньше чем масса черной дыры Бардина). В случае, когда массы обеих черных дыр равны, кротовая нора является полностью нестабильной.

## Литература

1. Morris M.S., Thorne K.S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity // Am. J. Phys. 1988. V. 56. 395 p.
2. Visser M., Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking // American Institute of Physics. Woodbury. 1995.
3. Cardoso V., Franzin E., Pani P. Is the Gravitational-Wave Ringdown a Probe of the Event Horizon? // Phys. Rev. Lett. 2016. V. 116. 171101 p.
4. Nandi K.K., Izmailov R.N., Yanbekov A.A., Shayakhmetov A.A. Ring-down gravitational waves and lensing observables: how far can a wormhole mimic those of a black hole? // Phys. Rev. D. 2017. V. 95. 104011 p.
5. Israel W., Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity // Nuovo Cim. B. 1966. V. 44. 1 p.
6. Poisson E., Visser M. Thin-shell wormholes: Linearization stability // Phys. Rev. D. 1995. V. 52. 7318 p.
7. Garcia M., Lobo F.S.N., Visser M. Generic spherically symmetric dynamic thin-shell traversable wormholes in standard general relativity // Phys. Rev. D. 2012. V. 86. 044026 p.
8. Lukmanova R. et al. Note on the Schwarzschild-Phantom wormhole // Indian J. Phys. 2016. V. 90. P. 1319–1323.
9. Akai Y., Nakao K.-I. Nonlinear stability of a brane wormhole // Phys. Rev. D. 2017. V. 96. 024033 p.
10. Wang X., Li P.C., Zhang C.Y., Guo M. Novel shadows from the asymmetric thin-shell wormhole // Phys. Lett. B. 2020. V. 811. 135930 p.
11. Wielgus M., Horak J., Vincent F., Abramowicz M. Reflection-asymmetric wormholes and their double shadows // Phys. Rev. D. 2020. V. 102. 084044 p.
12. Tsukamoto N. Linearization stability of reflection-asymmetric thin-shell wormholes with double shadows // Phys. Rev. D. 2021. V. 103. 064031 p.
13. Bardeen J.M. Non-singular general-relativistic gravitational collapse // Proceedings of International Conference GR5. 1968. 174 p.
14. Ayón-Beato E., García A. The Bardeen model as a nonlinear magnetic monopole // Phys. Lett. B. 2000. V. 493. 149 p.



**PROPERTIES OF REFLECTIVE-ASYMMETRIC WORMHOLES  
WITH A NONLINEAR ELECTROMAGNETIC CHARGE**

© **G.F. Akhtaryanova, E.E. Aygisheva, R.N. Izmailov**

Akmullah Bashkir State Pedagogical University,  
3a, ulitsa Oktyabrskoy revolyutsii, 450008, Ufa, Russian Federation

The paper investigates a wormhole model obtained by combining the Bardeen space-time of mass  $M_-$  and charge  $Q$  on the one side and the Schwarzschild space-time of mass  $M_+$  on the other. These objects are spherically symmetric in shape, but not reflectively symmetric, since the associated space-times are different. Reflectively asymmetric wormholes can reflect a significant portion of the incident radiation back into the spacetime in which it originated. Previously, this effect was considered in terms of the effective photon potential. Depending on the parameters of the model, the image of such a wormhole seen by a distant observer (its "shadow") may contain a photon ring formed on the side of the observer and a photon ring formed on the other side of the wormhole, or both photon rings. These unique topological features will allow us to clearly distinguish this class of objects from black holes using radio astronomy observations.

Key words: wormhole; thin shell; nonlinear electromagnetic charge; reflection-asymmetric objects.