

УДК 524.882

DOI: 10.31040/2222-8349-2022-0-1-35-40

**НИЗКОЛЕЖАЩИЕ ЧАСТОТЫ КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ МОД
ЧЕРНОЙ ДЫРЫ ТАУБ-НУТ**

© Р.Н. Измаилов, Р.Х. Каримов, И.И. Имаев, Н.Ф. Косарев

Квазинормальные моды черных дыр определяют затухание возмущений в промежуточные моменты времени и важны при изучении динамики черных дыр и внешних полей вокруг них. В настоящее время интерес к квазинормальным модам обусловлен тремя их особенностями. Первый связан с возможностью наблюдения квазинормальных мод и получения «следа» черной дыры с помощью строящихся гравитационных антенн нового поколения. Недавно коллаборации лазерно-интерферометрической гравитационно-волновой обсерватории (LIGO) и франко-итальянского детектора гравитационных волн, расположенного в Европейской гравитационной обсерватории, (VIRGO) сообщили о наблюдении сигнала гравитационных волн, соответствующего спирали и слиянию двух черных дыр, что привело к образованию единой черной дыры. Было показано, что наблюдения согласуются с теорией гравитации Эйнштейна с высокой точностью, ограниченной в основном статистической погрешностью. Второй касается соответствия анти-де Ситтера/Конформной теории поля, из которого следует, что большая черная дыра в пространстве анти-де Ситтера соответствует примерно тепловым состояниям в Конформной теории поля. Таким образом, затухание возмущений черных дыр можно связать с возвратом к тепловому равновесию возмущенного состояния в Конформной теории поля. Заметим, что в пространстве анти-де Ситтера квазинормальные моды черных дыр управляют распадом поля и на поздних временах, поскольку нет степенных хвостов и затухание всегда экспоненциальное. Третья особенность связана с возможной связью квазинормальных мод черных дыр в некоторых пространственно-временных геометриях со скейлингом Чоптюка. В работе исследуются низколежащие частоты квазинормальных мод черной дыры Тауб-НУТ (Ньюмен-Унти-Тамбурино) для скалярных, электромагнитных и Дираковских возмущений, используя приближение Венцеля, Крамерса и Бриллюэна (ВКБ) третьего порядка. Показано влияние параметра метрики НУТ на рассматриваемые виды частот квазинормальных мод.

Ключевые слова: квазинормальные моды; черная дыра; скалярные возмущения; затухающие колебания.

Введение. Общая теория относительности была успешно протестирована как в приближении слабого поля с использованием тестов солнечной системы, так и в режиме сильного поля с использованием наблюдения тени сверхмассивной черной дыры в центре эллиптической галактики M87* [1] с помощью телескопа горизонта событий и прямого обнаружения гравитационных волн слияния черных дыр и нейтронных звезд тесных двойных систем в лазерно-интерферометрической гравитационно-волновой обсерватории [2]. Обнаруженные гравитационные волны были испущены во время последнего этап слияния двойных черных дыр.

Частоты этих волн определялись определенными суперпозициями затухающих колебаний, то есть квазинормальных мод. Тщательный анализ этих экспериментов может быть весьма важным, поскольку он может пролить свет на природу гравитации в режиме сильного поля.

Квазинормальные моды черных дыр первоначально изучались в контексте общей теории относительности для решения Шварцшильда [3], а затем и в модифицированных теориях гравитации [4–7]. Фактически, модифицированные решения для черных дыр могут давать одинаковые наблюдательные признаки в асимптотических областях, но могут приводить

ИЗМАИЛОВ Рамиль Наильевич – к.ф.-м.н, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, e-mail: izmailov.ramil@gmail.com

КАРИМОВ Рамис Хамитович – к.ф.-м.н, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, e-mail: karimov_ramis_92@mail.ru

ИМАЕВ Ильнар Ильшатович, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, e-mail: imaevilnar1998@yandex.ru

КОСАРЕВ Николай Федорович – к.пед.н., Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, e-mail: nkosarev@yandex.ru

к качественно другим особенностям вблизи горизонта событий. Поэтому изучение различных модифицированных решений для черных дыр в области сильного поля по-прежнему остается активной и интересной областью исследований в контексте гравитационных волновых сигнатур черных дыр.

Одним из таких модифицированных решений является решение Тауб-НУТ [8], которое описывает черные дыры с массой M и параметром НУТ n . В некоторых источниках параметр НУТ может быть интерпретирован как заряд НУТ, гравитомагнитный монополь или двойная масса. Впервые решение Тауб-НУТ было получено в работе [9] и модернизировано в работе Манко и Руиза [8].

Решение Тауб-НУТ. Решения Шварцшильда и Тауб-НУТ представляют пример гравитационной дуальности, связь между ними во многом аналогична связи между магнитными монополями и электрическими зарядами в электродинамике [10]. Однако остается невыясненным вопрос об их физической интерпретации и возможности существования. В частности, известно, что решения типа Тауб-НУТ содержат замкнутые времениподобные кривые (ЗВК), которые рассматриваются как патология. Однако недавние расчеты показали, что свободное движение вдоль ЗВК невозможно, а содержащиеся в области ЗВК голые сингулярности в виде струн Миснера пронизаемы для геодезических линий [11]. Таким образом, есть основания рассматривать решения данного класса как физически допустимые и учитывать их в астрофизическом моделировании.

Исходная метрика Тауб-НУТ, полученная в работе [8], в координатах Бойера–Линквиста задается в виде:

$$ds^2 = f^{-1}dr^2 + (r^2 + n^2)d\Omega^2 - f(dt - Wd\phi)^2, \quad (1)$$

$$f = \frac{r^2 - 2Mr - n^2}{r^2 + n^2}, \quad (2)$$

$$W = -4n \sin^2(\theta/2),$$

где $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ – единичная сфера, M – масса объекта и n – параметр НУТ.

Особый интерес представляет параметр НУТ, который в литературе в основном имеет название «гравитомагнитный монополь». При $n=0$ метрика (1)–(2) переходит в метрику Шварцшильда. Если $n \neq 0$, то метрика (1)–(2) стационарна, осесимметрична, но не полностью асимптотично плоская, так как имеет одну квазибесконечную сингулярность [9]. В работе [12]

был исследован эффект Саньяка в пространстве-времени вращающейся черной дыры Керра-Тауб-НУТ и получен верхний предел заряда НУТ n для Земли, значение которого не превышает 5.68 м. В данной работе рассматриваются случаи, когда $n = 0, 0.3M, 0.5M, 0.9M$ и M для стационарной черной дыры Тауб-НУТ.

В общем случае метрическая функция W определяется по произвольной вещественной константе, которая может влиять на свойства пространства-времени, так что все решения НУТ определяются линейным элементом: $W = 2n\{\cos(\theta) + C\}$, где C – произвольная вещественная постоянная. В частном случае, при $C = \pm 1$, включающего одну сингулярность, решения НУТ будут иметь два квазибесконечных линейных источника [13].

Скалярные, электромагнитные и Дираковские возмущения. Далее в работе будут исследованы квазинормальные моды метрики, заданной уравнениями (1)–(2) для скалярных, электромагнитных и дираковских возмущений. Уравнение Клейна–Гордона для безмассового скалярного поля на фоне черной дыры имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}\partial_b\Phi) = 0, \quad (3)$$

принимая во внимание, что электромагнитное поле в искривленном пространстве-времени следует уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}F_{bc}g^{bd}g^{ca}) = 0, \quad (4)$$

где $F_{bc} = \partial_a A_c - \partial_a A_b$ и A_c – четыре векторных потенциала. После разделения переменных радиальные части приведенных выше уравнений принимают вид

$$\frac{d^2\Psi_S}{dr_*^2} + \{\omega^2 - V_S(r)\}\Psi_S = 0, \quad (5)$$

где индекс S (= “Scalar”) относится к скалярному полю, $S = “EM”$ относится к электромагнитному полю, $S = “Dirac”$ относится к дираковскому полю и r_* – черепашья координата, определенная как

$$dr_* = \frac{dr}{f(r)}. \quad (6)$$

Эффективные потенциалы для скалярного и электромагнитного случая задаются в виде

$$V_{Scalar}(r) = f(r)\left\{\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}\right\}, \quad (7)$$

и

$$V_{EM}(r) = f(r)\left\{\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}. \quad (8)$$

С другой стороны, ковариантное уравнение Дирака имеет вид

$$\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \omega_\alpha \right) \Psi = 0, \quad (9)$$

где α – гамма-матрицы Дирака, а ω_α – спиновые связи. После применения метода разделения переменных радиальная часть приведенного выше уравнения может быть снова приведена в форме уравнения Шредингера, однако с двумя различными потенциалами, соответствующими двум различным хиральностям

$$\frac{d^2 \Psi_\pm}{dr_*^2} + \{ \omega^2 - V_\pm^{\text{Dirac}}(r) \} \Psi_\pm = 0, \quad (10)$$

где эффективные потенциалы имеют вид:

$$V_\pm^{\text{Dirac}}(r) = \frac{l+1}{r} f(r) \left\{ \frac{l+1}{r} \mp \frac{\sqrt{f(r)}}{r} \pm \frac{d\sqrt{f(r)}}{dr} \right\}. \quad (11)$$

Отметим, что потенциалы $V_+^{\text{Dirac}}(r)$ и $V_-^{\text{Dirac}}(r)$ могут быть преобразованы друг в друга, подразумевая, что квазинормальные моды, полученные из этих двух, казалось бы, разных потенциалов, являются изоспектральными. Поэтому для расчета квазинормальных мод можно использовать любой из двух $V_\pm^{\text{Dirac}}(r)$.

Здесь стоит отметить, что устойчивость скалярных и электромагнитных возмущений на общем фоне черной дыры может быть подтверждена положительной определенностью эффективного потенциала. Однако совсем недавно было показано, что ситуация с полем Дирака немного отличается, особенно если рассматривать черные дыры с поправкой на более высокую кривизну, а также изучать их в асимптотическом пространстве де Ситтера. Во-первых, было показано, что даже если эффективный потенциал для одной из хиральностей состоит из отрицательного зазора, возмущение поля Дирака может поддерживать стабильность черной дыры. Однако положительная определенность любого из потенциалов для любой из хиральностей не помогает асимптотически определить фон черных дыр, поскольку потенциал для обеих хиральностей в целом может иметь отрицательные пробелы. Имея в виду эти особенности, мы планируем изучить частоты квазинормальных мод черной дыры Тауб-НУТ. На рис. 1 мы показали зависимость эффективного потенциала трех типов возмущений (a – скалярные возмущения, b – электромагнитные, v – дираковские) от радиальной координаты r при различных значениях параметра n . Из рис. 1 видно, что эффективный потенциал черной дыры Тауб-НУТ отличается от Шварцшильдовских значений около горизонта событий, и перестает отличаться с увеличением радиальной координаты. Наибольшее отличие достигается в точке максимума функции. С увеличением заряда

НУТ максимальное значение эффективного потенциала при всех возмущениях уменьшается. Квазинормальные моды являются решениями главного волнового уравнения, заданного уравнением (5), удовлетворяющим условиям чистых исходящих волн на бесконечности и чистых входящих волн на горизонте событий.

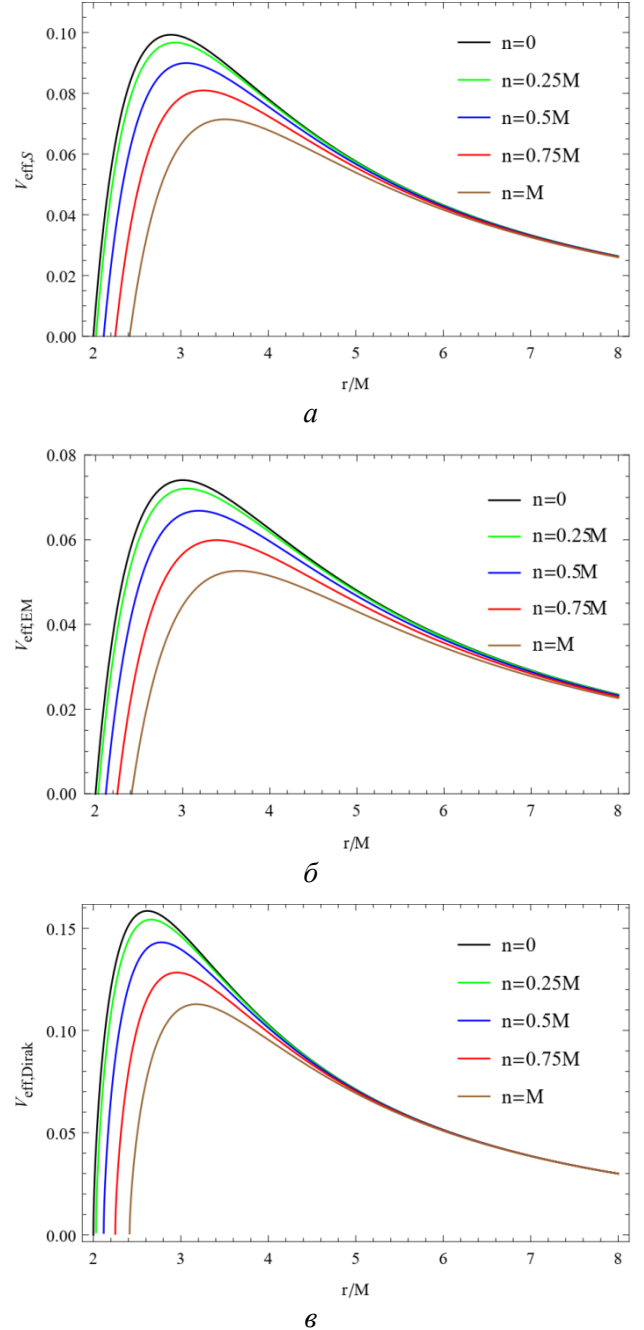


Рис. 1. Зависимость эффективного потенциала для скалярных: (a – левый верхний рисунок), электромагнитных (b – правый верхний рисунок) и дираковских возмущений (v – нижний рисунок) от радиальной координаты при различных значениях параметра НУТ n

Приближение Венцеля, Крамерса и Бриллюэна. Хорошо известно, что аналитическое вычисление частот квазинормальных мод практически невозможно в большинстве случаев, за исключением нескольких фоновых решений, таких как черная дыра Баньядоса–Банстера–Занелли (BTZ). Поэтому, чтобы численно получить квазинормальные частоты, мы использовали приближение 3-го порядка Венцеля, Крамерса и Бриллюэна (ВКБ). Хорошо известно, что, основываясь на полуклассических аргументах, Шуц и Уилл предложили метод ВКБ, который позже был модифицирован путем сопоставления внешних решений ВКБ по двум точкам поворота, что может быть сделано только тогда, когда две классические точки поворота достаточно близки. Затем потенциал во внутренней области был расширен с помощью расширения ряда Тейлора до шестого порядка. Асимптотическое приближение к внутреннему решению используется для соответствия ВКБ 3-го порядка.

Формула для квазинормальных частот с использованием подхода ВКБ 3-го порядка задается в виде:

$$\omega^2 = \left[V_0 + (-2V_0'')^{1/2} \tilde{\Lambda}(k) \right] - i \left(k + \frac{1}{2} \right) (-2V_0'')^{1/2} [1 + \tilde{Y}(k)], \quad (12)$$

где $\tilde{\Lambda}(k) = \Lambda/i$ и $\tilde{Y} = Y/(k+1/2)$. Λ и Y определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{i}{(-2V_0'')^{1/2}} \left[\frac{1}{8} \left\{ \frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right\} \left(\frac{1}{4} + v^2 \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{288} \left\{ \frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right\} \left(\frac{1}{4} + v^2 \right) \right], \\ Y = & \frac{k+1/2}{(-2V_0'')^{1/2}} \left[\frac{5}{6912} \left\{ \frac{V_0^{(3)}}{V_0''} \right\}^4 (77+188v^2) - \right. \\ & - \frac{1}{384} \left\{ \frac{V_0^{(3)2}V_0^{(4)}}{V_0''^3} \right\}^4 (51+100v^2) + \\ & + \frac{1}{2304} \left\{ \frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right\}^2 (67+68v^2) + \\ & + \frac{1}{288} \left\{ \frac{V_0^{(3)}V_0^{(5)}}{V_0''^2} \right\}^4 (19+28v^2) + \\ & \left. + \frac{1}{288} \left\{ \frac{V_0^{(6)}}{V_0''^2} \right\} (5+4v^2) \right], \end{aligned}$$

где $V_0^{(m)}$ – m -я производная по черепашьей координате в точке максимума эффективного по-

тенциала r_0 , V_0 – высота максимума потенциала и $v = k + 1/2$, где k – положительная константа.

На самом деле здесь следует отметить, что точность метода ВКБ в решающей степени зависит от количества мультиполей l и обертонов k . В работе [4] было показано, что подход ВКБ хорошо работает в ситуациях, когда количество мультиполей больше по сравнению с количеством обертонов: $l > k$. Это настолько хорошее приближение, что результаты численного интегрирования волнового уравнения и результаты ВКБ хорошо согласуются, но подход ВКБ не дает удовлетворительных результатов, если $l = k$, и неприменим для $l < k$. С другой стороны, результаты постепенно улучшаются с увеличением значений l .

Численные оценки частот квазинормальных мод черной дыры Тауб-НУТ. Здесь будут представлены численные значения частот квазинормальных мод черной дыры Тауб-НУТ для скалярных, электромагнитных и дираковских возмущений, которые были получены с помощью приближения ВКБ 3-го порядка. Частоты были получены для широкого диапазона значений параметров путем индивидуального изменения l , k и n . Результаты для всех трех типов возмущений представлены в табл. 1. В работе было рассмотрено три значения мультиполя l от 0 до 2. При этом выбранные значения обертонов соответствовали условию $l \leq k$: для случая $l = 0$ соответствует только одно значение $k = 0$, для случая $l = 1$ соответствуют значения $k = 0$ и $k = 1$ и для случая $l = 2$ соответствуют значения $k = 0$, $k = 1$ и $k = 2$. Для каждой пары l и k было рассмотрено 5 значений параметра НУТ: $n = 0$ (случай решения Шварцшильда), $0.25M$, $0.5M$, $0.75M$, M .

Во втором столбце табл. 1 представлены численные значения частот квазинормальных мод черной дыры Тауб-НУТ для скалярных возмущений. Из приведенных выше результатов можно сделать вывод, что частота колебаний (действительная часть числа) увеличивается с увеличением параметра мультиполя l и не зависит от параметра обертона k . С увеличением параметра НУТ частота колебаний уменьшается для каждого значения мультиполя l . Наименьшее значение соответствует случаю, когда $l = 0$ и $n = M$, а наибольшее значение достигается при $l = 2$ и $n = 0$. Таким образом, можно сделать вывод о том, что наличие параметра НУТ уменьшает частоту колебаний.

Скорость затухающих колебаний (мнимая часть числа) так же увеличивается с увеличением параметра мультиполя l . Отметим, что в отличие от предыдущего случая, скорость затухающих колебаний имеет очень сильную зави-

симось от параметра обертона k и увеличивается с увеличением k . В случае $k = 0$ и $k = 2$ скорость затухающих колебаний уменьшается с увеличением параметра НУТ и наименьшее значение соответствует случаю, когда $l = 1$, $k = 0$ и $n = M$. Однако в случае, когда $l = 1$ и $k = 1$ мы получили необычный результат, а именно, скорость затухающих колебаний увеличивается с увеличением параметра НУТ. Если в случае решения Шварцшильда скорость

затухающих колебаний увеличивается на 19.3% при $k = 1$ относительно $k = 0$, то для ненулевых значений параметра НУТ увеличение варьируется от 40.2 до 221%. Другой интересный результат был получен при $l = 2$ и $k = 1$: с увеличением параметра НУТ от 0 до $0.75 M$ скорость затухающих колебаний увеличивается, а затем наблюдается их уменьшение при $n = M$. Таким образом, наибольшее отличие скорости затухающих колебаний достигается при $k = 1$.

Т а б л и ц а 1

Численные оценки частот квазинормальных мод черной дыры Тауб-НУТ

Параметр НУТ	Скалярные частоты	Электромагнитные частоты	Дираковские частоты
$l = 0, k = 0$			
0	$0.026367 - 0.404606i$	-	$0.046683 - 0.160519i$
$0.25M$	$0.025767 - 0.393003i$	-	$0.045443 - 0.172965i$
$0.5M$	$0.024156 - 0.362362i$	-	$0.042170 - 0.198932i$
$0.75M$	$0.021958 - 0.321769i$	-	$0.037823 - 0.219402i$
M	$0.019583 - 0.279462i$	-	$0.033261 - 0.225941i$
$l = 1, k = 0$			
0	$0.099261 - 0.358212i$	$0.073718 - 0.282811i$	$0.158452 - 0.486066i$
$0.25M$	$0.096708 - 0.348451i$	$0.072086 - 0.268889i$	$0.154229 - 0.474817i$
$0.5M$	$0.089950 - 0.322621i$	$0.066847 - 0.247716i$	$0.143087 - 0.444282i$
$0.75M$	$0.080935 - 0.288254i$	$0.059907 - 0.219941i$	$0.128308 - 0.402078i$
M	$0.071421 - 0.252205i$	$0.052643 - 0.191239i$	$0.112813 - 0.356084i$
$l = 1, k = 1$			
0	$0.099261 - 0.427102i$	$0.073718 - 0.377807i$	$0.158452 + 2.088247i$
$0.25M$	$0.096708 - 0.488743i$	$0.072086 - 0.653364i$	$0.154229 + 1.786128i$
$0.5M$	$0.089950 - 0.624102i$	$0.066847 - 0.704654i$	$0.143087 + 1.085082i$
$0.75M$	$0.080935 - 0.746069i$	$0.059907 - 0.737981i$	$0.128308 + 0.354289i$
M	$0.071421 - 0.809687i$	$0.052643 - 0.735325i$	$0.112813 - 0.194642i$
$l = 2, k = 0$			
0	$0.247117 - 0.433666i$	$0.222042 - 0.400712i$	$0.343495 - 0.578162i$
$0.25M$	$0.240595 - 0.421413i$	$0.216259 - 0.380582i$	$0.334312 - 0.562777i$
$0.5M$	$0.223376 - 0.389173i$	$0.200541 - 0.350668i$	$0.310096 - 0.521942i$
$0.75M$	$0.200507 - 0.346655i$	$0.179724 - 0.311447i$	$0.277997 - 0.467362i$
M	$0.176493 - 0.302452i$	$0.157932 - 0.270929i$	$0.244369 - 0.409828i$
$l = 2, k = 1$			
0	$0.247117 - 0.938042i$	$0.222042 - 0.871485i$	$0.343495 - 0.020904i$
$0.25M$	$0.240595 - 0.965206i$	$0.216259 - 0.988442i$	$0.334312 - 0.150641i$
$0.5M$	$0.223376 - 1.016955i$	$0.200541 - 1.013508i$	$0.310096 - 0.444305i$
$0.75M$	$0.200507 - 1.044080i$	$0.179724 - 1.012499i$	$0.277997 - 0.731932i$
M	$0.176493 - 1.026760i$	$0.157932 - 0.974396i$	$0.244369 - 0.920458i$
$l = 2, k = 2$			
0	$0.247117 + 6.469401i$	$0.222042 + 5.696610i$	$0.343495 + 19.11004i$
$0.25M$	$0.240595 + 5.816819i$	$0.216259 + 4.316794i$	$0.334312 + 17.49446i$
$0.5M$	$0.223376 + 4.270851i$	$0.200541 + 3.077283i$	$0.310096 + 13.63511i$
$0.75M$	$0.200507 + 2.589066i$	$0.179724 + 1.746195i$	$0.277997 + 9.364506i$
M	$0.176493 + 1.236587i$	$0.157932 + 0.693472i$	$0.244369 + 5.834294i$

Подобное заключение можно сделать для электромагнитных и дираковских возмущений, результаты которых представлены во втором и третьем столбце табл. 1.

Заключение. В работе были исследованы низколежащие частоты квазинормальных мод черной дыры Тауб-НУТ для скалярных, электромагнитных и Дираковских возмущений. Для проведения численных оценок использовалось приближение ВКБ третьего порядка. Было показано, что частота колебаний при всех типах возмущений уменьшается с увеличением параметра НУТ и с увеличением числа мультиполей. Однако, как было показано в табл. 1, частота колебаний не зависит от числа обертонов, в то время как скорость затухающих колебаний имеет сильную зависимость. Так, когда число обертонов равно 0 и 2 скорость затухающих колебаний уменьшается с увеличением параметра НУТ. В случае, когда $k = 1$ с увеличением параметра НУТ от 0 до $0.75 M$ скорость затухающих колебаний увеличивается, а затем наблюдается их уменьшение при $n = M$.

Литература

1. Akiyama K. et al. (Event Horizon Telescope) First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole // *Astrophys. J. Lett.* 2019. V. 875. P. L1.
2. Abbott B.P. et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger // *Phys. Rev. Lett.* 2016. V. 116. 061102 p.

3. Berti E., Cardoso V., Starinets A.O. Quasinormal modes of black holes and black branes // *Class. Quantum Grav.* 2009. V. 26. 163001 p.
4. Konoplya R., Zhidenko A. Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory // *Rev. Mod. Phys.* 2011. V. 83. 793 p.
5. Toshmatov B., Abdujabbarov A., Stuchlik Z., Ahmedov B. Quasinormal modes of test fields around regular black holes // *Phys. Rev. D.* 2015. V. 91. 083008 p.
6. Bueno P., Cano P.A., Goelen F., Hertog T., Vercknocke B. Echoes of Kerr-like wormholes // *Phys. Rev. D.* 2018. V. 97. 024040 p.
7. Nandi K.K., Izmailov R.N., Yanbekov A.A., Shayakhmetov A.A. Ring-down gravitational waves and lensing observables: How far can a wormhole mimic those of a black hole? // *Phys. Rev. D.* 2017. V. 95. 104011 p.
8. Manko V.S., Ruiz E. Physical interpretation of the NUT family of solutions // *Class. Quantum Grav.* 2005. V. 22. P. 3555–3560.
9. Newman E., Tamburino L., Unti T.A. Computer Program for the Newman-Janis Algorithm // *J. Math. Phys.* 1963. V. 4. P. 915–923.
10. Wu T.T., Yang C.N. Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields // *Phys. Rev. D.* 1975. V. 12. 3845 p.
11. Bonnor W.B. A class of stationary solutions of the Einstein-Maxwell equations // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1969. V. 66. P. 77–83.
12. Kulbakova A., Karimov R.Kh., Izmailov R.N., Nandi K.K. Upper limit on NUT charge from the observed terrestrial Sagnac effect // *Class. Quantum Grav.* 2018. V. 35. 115014 p.
13. Ernst F.J. New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem // *Phys. Rev.* 1968. V. 167. 1175 p.

LOW-LYING QUASINORMAL MODE FREQUENCIES OF TAUB-NUT BLACK HOLE

© R.N. Izmailov, R.Kh. Karimov, I.I. Imaev, N.F. Kosarev

Akmullah Bashkir State Pedagogical University,
3a, ulitsa Oktyabrskoy revolyutsii, 450008, Ufa, Russian Federation

Quasi-normal modes of black holes determine the damping of disturbances at intermediate times and are important in studying the dynamics of black holes and external fields around them. Currently, interest in quasi-normal modes is due to three of their features. The first one is connected with the possibility of observing quasi-normal modes and obtaining a "trace" of a black hole with the help of new-generation gravitational antennas under construction. Recently, collaborations between the Laser Interferometric Gravitational Wave Observatory (LIGO) and the French-Italian gravitational wave detector located at the European Gravitational Observatory (VIRGO) reported the observation of a gravitational wave signal corresponding to the spiral and merging of two black holes, resulting in the formation of a single black hole. It was shown that the observations agree with Einstein's theory of gravity with a high accuracy, limited mainly by a statistical error. The second concerns the anti-de Sitter / Conformal field theory correspondence, which implies that a large black hole in anti-de Sitter space corresponds roughly to thermal states in Conformal field theory. Thus, the damping of black hole perturbations can be associated with the return to thermal equilibrium of the perturbed state in the Conformal field theory. Note that in anti-de Sitter space, the quasi-normal modes of black holes control the decay of the field at later times, since there are no power-law tails and the decay is always exponential. The third feature is associated with the possible connection of quasinormal modes of black holes in some space-time geometries with the Choptuyuk scaling. This paper investigates the low-lying frequencies of the quasi-normal modes of the Taub-NUT (Newman-Unti-Tamburino) black hole for scalar, electromagnetic, and Dirac perturbations using the Wenzel, Kramers, and Brillouin (WKB) approximation of the third order. The influence of the NUT metric parameter on the considered types of frequencies of quasi-normal modes is shown.

Key words: quasinormal modes; black hole; scalar perturbations; damped oscillations.