

УДК 539.3

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ РАЗДУВА ИЗБЫТОЧНЫМ ДАВЛЕНИЕМ
ТРЕХСЛОЙНОЙ РЕЗИНОПОДОБНОЙ ОБОЛОЧКИ**

© Р.Ш. Гимадиев

Приводятся результаты математического моделирования деформирования трехслойной оболочки, находящейся под действием произвольного избыточного давления. Динамика раздува рассматривается в пространственной постановке в декартовой системе координат. Оболочки описываются в Лагранжевых криволинейных координатах. Под воздействием давления на внутреннюю оболочку, оболочка деформируется и перемещается в пространстве, при этом обжимается промежуточный слой-заполнитель до определенной толщины и передает усилия обжатия на внешнюю оболочку. Физические соотношения при больших деформациях для уравнения движения мягких оболочек приняты по работе К.Ф. Черныха по данным экспериментов для резиноподобного материала. Для быстропротекающих процессов деформирования в физические соотношения вводятся слагаемые, учитывающие внутреннее трение в материале оболочек, которые также улучшают устойчивость алгоритма численного расчета. Пространственная задача деформирования составных оболочек решается методом конечных разностей по явной схеме. В качестве примера рассматривается трехслойная оболочка, состоящая из частей сферических поверхностей с постоянными радиусами у оснований. Расчетная область покрывается нерегулярной сеткой. Приводятся результаты расчета изменения формы оболочек до формы равновесного состояния при раздуве. Анализируются изменения окружных и осевых натяжений при деформации. Также исследуются степени утонений деформируемых поверхностей. Найден критический режим статического состояния раздува оболочки.

Ключевые слова: моделирование, динамика, резиновая трехслойная оболочка, раздув, численный эксперимент, потеря устойчивости.

Механикой деформирования классических трехслойных оболочек занимались видные исследователи, что объясняется потребностями авиастроения: Л.М. Куршин [1], М.А. Ильгамов, Х.М. Муштари [2], А.П. Прусаков [3], Н.К. Галимов [4, 5], В.Н. Паймушин, В.Ф. Снигирев [5] и другие.

Оболочки с резиноподобными материалами рассмотрены в работах [6–9]. Нелинейные физические соотношения по латексам в [6] получены А.Г. Гиниятуллиним на основе обработки экспериментов для задачи наполнения оболочки медицинского катетера. В работе [7] определен порог устойчивости динамической задачи выпучивания оболочки с использованием нелинейных соотношений для эластомера по работе К.Ф. Черныха [8].

Эластомеры (резиноподобные материалы) применяются в машиностроении. В частности в авиастроении используются топливные баки. Также перспективным направлением является хранение нефтепродуктов в емкостях под водой, и это требует повышенного внимания к прочности подобных конструкций.

Увеличение количества слоев оболочки обеспечивает надежность эксплуатации. Выбор конструктивных параметров достаточно произволен и требует расчетной проработки. В связи с этим является актуальным математическое моделирование этого процесса.

Для наружных слоев можно принять гипотезу несжимаемости материала, т.е. при деформации плотность материала не меняется и толщина оболочки при этом уменьшается. Для заполнителя можно предположить, что объем при деформации уменьшается, плотность заполнителя меняется, и обжатие носит локальный характер. Усилия воздействия на внешние оболочки со стороны заполнителя при обжатии возрастают линейно. Таким образом, будем изучать динамику движения наружной и внутренней оболочек, а влияние заполнителя на них будем учитывать дополнительными соотношениями.

Пусть в момент времени t срединные поверхности внешней, внутренней оболочек и заполнителя обозначим Ω_1 , Ω_2 и Ω . А текущие толщины в этот момент времени соответ-

ственно h_1, h_2, h . Будем считать, что для внешних несущих поверхностей справедлива гипотеза Киргофа–Лява. Для заполнителя первоначально нормальная линия к срединной поверхности остается при деформации прямой, но уже не по нормали к срединной линии [2]. В этой работе основные зависимости теории полой оболочки в случае малых прогибов с легким заполнителем приведены к системе трех линейных уравнений, что позволило в частном случае решить аналитически задачу устойчивости и колебаний ортотропной прямоугольной пластины при свободном опирании краев. Первая часть гипотезы общая для оболочек, а вторая связана с заполнителем, т.к. линейные размеры внутренней оболочки меньше, чем наружной, следовательно, внутренняя оболочка деформируется сильнее и сдвигает легкий заполнитель относительно средней линии.

Положения срединных точек деформированных поверхностей определяются радиус-векторами $\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{r}$ относительно неподвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$, а единичные нормальные вектора соответственно $\mathbf{e}_3^{(1)}, \mathbf{e}_3^{(2)}, \mathbf{e}_3$.

1. Уравнения движения трехслойной оболочки. Наружная и внутренняя оболочки Ω_k ($k = 1, 2$) и оболочка заполнителя Ω безмоментные. В момент времени $t = t_0$ под действием внешних и внутренних сил при $t > t_0$ оболочки Ω_1, Ω_2 и Ω деформируются и перемещаются в пространстве $x_\gamma, \gamma = 1, 2, 3$. Оболочки Ω_k отнесены к системам криволинейных координат $\alpha_{(k)}^1, \alpha_{(k)}^2, z_{(k)}$, а заполнитель Ω – к α^1, α^2, z , которые нормально связаны с соответствующими срединными поверхностями.

Деформированные безмоментные оболочки в сечениях $\alpha_{(k)}^i = \text{const}, (k, i = 1, 2)$ и $z_{(k)} = \text{const}$ в момент времени t имеют толщины $h_*^{(k)} = h^{(k)}(1 + \varepsilon_3^{(k)}) = h^{(k)}\lambda_3^{(k)}$, где $\varepsilon_3^{(k)}$ – деформация утонения и $\lambda_3^{(k)}$ – кратность утонения в поперечном направлении $z_{(k)}$.

В теории мягких оболочек (к ним можно отнести и резиноподобные тонкие материалы) вместо напряжений вводятся натяжения. Инте-

грируя напряжения по толщине оболочки $h_*^{(k)}$, можно получить натяжения в виде

$$\mathbf{T}_{(k)}^i = T_{(k)}^{ij} \mathbf{e}_j^{(k)}, \quad \mathbf{T}_{(k)}^3 = T_{(k)}^{33} \mathbf{e}_3^{(k)},$$

где $T_{(k)}^{ij} = h^{(k)}\lambda_3^{(k)}\sigma_{(k)}^{ij}$ и $T_{(k)}^{33} = h^{(k)}\lambda_3^{(k)}\sigma_{(k)}^{33}$ – физические компоненты натяжений. Пусть на выделенные малые элементы поверхностей с площадями $d\sigma^k = \sqrt{G^{(k)}}\partial\alpha_1^{(k)}\partial\alpha_2^{(k)}$ действуют поверхностные силы $\mathbf{p}^{(k)}$, приложенные по сторонам поверхностей $z^{(1)} = h_*^{(1)}/2$ и $z^{(2)} = -h_*^{(2)}/2$ $\mathbf{p}^{(k)} = p^{(k)}\mathbf{e}_3^{(k)}d\sigma^k = p^{(k)}\mathbf{e}_3^{(k)}\sqrt{G^{(k)}}\partial\alpha_1^{(k)}\partial\alpha_2^{(k)}$, а со стороны заполнителя на внешнюю оболочку ($k = 1$) действует сила сжатия $\mathbf{T}_{(1)\Omega}^3 = T_{(1)}^{33}\mathbf{e}_3d\sigma$, а на внутреннюю оболочку ($k = 2$) соответственно $\mathbf{T}_{(2)\Omega}^3 = -\mathbf{T}_{(1)\Omega}^3$.

$$\mathbf{T}_{(1)\Omega}^3 = T_{(1)}^{33}\mathbf{e}_3d\sigma = T_{(1)}^{33}\mathbf{e}_3\sqrt{G^{(z)}}\partial\alpha_1\partial\alpha_2.$$

На оболочки действуют массовые силы $\mathbf{Q}^{(k)} + \mathbf{Q}/2, k = 1, 2$, где \mathbf{Q} – вектор массовых сил заполнителя

$$\mathbf{Q}^{(k)} = \mathbf{g}\rho^{(k)}h_*^{(k)}d\sigma^{(k)} = \mathbf{g}\rho^{(k)}h_*^{(k)}\sqrt{G^{(k)}}\partial\alpha_1^{(k)}\partial\alpha_2^{(k)},$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{g}\rho_\Omega h_* d\sigma = \mathbf{g}\rho_\Omega h_* \sqrt{G^{(z)}}\partial\alpha_1\partial\alpha_2,$$

где $\rho^{(k)}$ – плотность материала оболочки, ρ_Ω – плотность заполнителя, \mathbf{g} – ускорение свободного падения, $G^{(z)}$ – относится к изменению элемента площади заполнителя вдоль координат α_1 и α_2 .

Под действием разности давлений, действующих на оболочки Ω_1 и Ω_2 , заполнитель обжимается и передает усилия обжатия на оболочки Ω_1 и Ω_2 .

Прикладывая к выделенному элементу оболочки внутренние и внешние усилия, а также инерционные силы, исходя из принципа Даламбера, можно получить уравнение движения следующего вида:

$$\begin{aligned} & \rho_\Sigma^{(k)} h_*^{(k)} \sqrt{G^{(k)}} \frac{\partial^2 \mathbf{r}^{(k)}}{\partial t^2} = \\ & = \frac{\partial}{\partial \alpha_1^{(k)}} \left((T_{(k)}^{11} \mathbf{e}_1^{(k)} + T_{(\bar{k})}^{12} \mathbf{e}_2^{(k)}) \sqrt{G_{22}^{(k)}} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_2^{(k)}} \left((T_{(k)}^{22} \mathbf{e}_2^{(k)} + T_{(\bar{k})}^{21} \mathbf{e}_1^{(k)}) \sqrt{G_{11}^{(k)}} \right) + \\ & + \left(\mathbf{p}^{(k)} + T_{(k)}^{33} \mathbf{e}_3^{(k)} + \rho_\Sigma^{(k)} h_*^{(k)} \mathbf{g} \right) \sqrt{G^{(k)}}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

здесь $T_{(\bar{k})}^{12} = T_{(k)}^{12} + T_{\Omega}^{12}$, $T_{(\bar{k})}^{21} = T_{(k)}^{21} + T_{\Omega}^{21}$,

$\rho_{\Sigma}^{(k)} = \rho^{(k)} + \rho_{\Omega}/2$ и неизвестными являются вектор-функция \mathbf{r} и компоненты истинных внутренних усилий T^{ij} .

Рассматривая координаты точек относительно неподвижной ортогональной декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ с ортами \mathbf{i}_{γ} ($\gamma = 1, 2, 3$), можно записать

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}(\alpha^1, \alpha^2, t) = \sum_{\gamma=1}^3 x_{\gamma}^{(k)} \mathbf{i}_{\gamma} = x_{\gamma}^{(k)} \mathbf{i}_{\gamma}, \quad (1.2)$$

$$x_{\gamma}^{(k)} = x_{\gamma}^{(k)}(\alpha^1, \alpha^2, t),$$

где $x_{\gamma}^{(k)}$ – координаты произвольной точки на поверхности Ω_k . Основные базисные векторы имеют вид

$$\mathbf{r}_j^{(k)} = \partial \mathbf{r}^{(k)} / \partial \alpha^j = \mathbf{r}_{\alpha^j}^{(k)} = \left(x_1^{(k)} \right)_j \mathbf{i}_1 + \left(x_2^{(k)} \right)_j \mathbf{i}_2 + \left(x_3^{(k)} \right)_j \mathbf{i}_3 = x_{j,\gamma}^{(k)} \mathbf{i}_{\gamma}, \quad (j = 1, 2).$$

Компоненты метрического тензора $G_{jm}^{(k)}$ равны $G_{jm}^{(k)} = \mathbf{r}_j^{(k)} \mathbf{r}_m^{(k)} = r_{j,l}^{(k)} r_{m,l}^{(k)}$.

Косинусы углов между ортами криволинейных координат на поверхности Ω_k и единичными векторами \mathbf{i}_{γ} определяются из следующих выражений $\mathbf{e}_j^{(k)} = l_{j\gamma}^{(k)} \mathbf{i}_{\gamma}$, $l_{j\gamma}^{(k)} = \mathbf{e}_j^{(k)} \mathbf{i}_{\gamma}$.

Так как $\mathbf{r}_j^{(k)} = x_{j,\gamma}^{(k)} \mathbf{i}_{\gamma}$, $x_{j,\gamma}^{(k)} = \mathbf{r}_j^{(k)} \mathbf{i}_{\gamma}$, $x_{j,\gamma}^{(k)} / G_{jj}^{(k)} = \left(\mathbf{r}_j^{(k)} / G_{jj}^{(k)} \right) \mathbf{i}_{\gamma} = \mathbf{e}_j^{(k)} \mathbf{i}_{\gamma}$, то из последней записи следуют выражения для определения косинусов углов

$$l_{j\gamma}^{(k)} = x_{j,\gamma}^{(k)} / G_{jj}^{(k)}, \quad (j = 1, 2), \quad (\gamma = 1, 2, 3). \quad (1.3)$$

Для определения косинусов углов между нормальными на поверхностях Ω_k , ($k = 1, 2$) и единичными векторами \mathbf{i}_{γ} запишем векторное произведение единичных базисных векторов в виде $\mathbf{e}_3^{(k)} = \mathbf{e}_1^{(k)} \times \mathbf{e}_2^{(k)} \sqrt{G_{11}^{(k)} G_{22}^{(k)}} / \sqrt{G^{(k)}}$. Из которого следуют следующие выражения:

$$\begin{aligned} l_{31}^{(k)} &= \left(l_{12}^{(k)} l_{23}^{(k)} - l_{13}^{(k)} l_{22}^{(k)} \right) \sqrt{G_{11}^{(k)} G_{22}^{(k)}} / \sqrt{G^{(k)}}, \\ l_{32}^{(k)} &= \left(l_{13}^{(k)} l_{21}^{(k)} - l_{11}^{(k)} l_{23}^{(k)} \right) \sqrt{G_{11}^{(k)} G_{22}^{(k)}} / \sqrt{G^{(k)}}, \\ l_{33}^{(k)} &= \left(l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} - l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)} \right) \sqrt{G_{11}^{(k)} G_{22}^{(k)}} / \sqrt{G^{(k)}}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Пусть вектор \mathbf{g} направлен вдоль оси x_3 , тогда $\mathbf{g} = g \mathbf{i}_3$. Проектируя уравнение (1.1) на

декартовы оси и учитывая соотношения (1.3), (1.4), приходим к трем уравнениям движения

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma}^{(k)} h_*^{(k)} \sqrt{G^{(k)}} \frac{\partial^2 x_{\gamma}^{(k)}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha^1} \left((T^{11} l_{1\gamma}^{(k)} + T_{(\bar{k})}^{12} l_{2\gamma}^{(k)}) \sqrt{G_{22}^{(k)}} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \alpha^2} \left((T^{22} l_{2\gamma}^{(k)} + T_{(\bar{k})}^{21} l_{1\gamma}^{(k)}) \sqrt{G_{11}^{(k)}} \right) + \\ &+ p_3^{(k)} l_{3\gamma}^{(k)} \sqrt{G^{(k)}} \left(1 - \delta_{3\gamma} \rho_{(k)} h_*^{(k)} g \right), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\delta_{31} = \delta_{32} = 0, \quad \delta_{33} = 1, \quad \gamma = 1, 2, 3.$$

Уравнения движения оболочек Ω_1 , Ω_2 имеют вид (1.5) и для каждой из них имеются свои соотношения вида (1.3) и (1.4). Уравнения движения решаются методом конечных разностей по явной схеме.

2. Физические соотношения. В соответствии с результатами работы [8] физические соотношения принимаются следующего вида:

$$\begin{aligned} T^{11} &= h_* \left\{ \mu \left[(1 + \beta) (\lambda_1 - \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1}) \right. \right. \\ &\left. \left. + (1 - \beta) (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1^{-1}) \right] + \eta \dot{\epsilon}_1 \right\}, \\ T^{22} &= h_* \left\{ \mu \left[(1 + \beta) (\lambda_2 - \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1}) \right. \right. \\ &\left. \left. + (1 - \beta) (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2^{-1}) \right] + \eta \dot{\epsilon}_2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

введя в них слагаемые $\dot{\epsilon}_i = \partial \epsilon_i / \partial t$, связанные с учетом внутреннего трения в материале оболочки для быстротекающих процессов деформирования.

Резиноподобные оболочки по своим характеристикам приближаются к мягким, сдвиговыми усилия составляют порядка двух процентов от растягивающих, поэтому в первом приближении сдвиговыми усилиями в слоях оболочек будем пренебрегать и будем учитывать только усилия обжатия между слоями по линейному закону.

Для резиноподобных несжимаемых материалов соотношения (2.1) составлены исходя из результатов работы К.Ф. Черныха [8] и модели Кельвина–Фойгта. Для резины (ИРП–2052) коэффициенты $\mu = 8.75$, $\beta = 1.43$ [8], причем характеристика μ по физическому смыслу соответствует модулю упругости первого рода E . Параметр η характеризует внутреннее вязкое трение. Следует отметить, что в быстротекающих динамических процессах учет внутреннего трения в соотношениях (2.1) позволяет гасить скорости волн напряжений в направлениях α^1 , α^2 и улучшает устойчивость численных алгоритмов решения рассматриваемых ниже задач.

3. Пример расчета раздува трехслойной оболочки. Пусть промежуточный слой допускает обжатие до величины $0.5h$, где $h=0.1$ м – начальная толщина промежуточного слоя. На рис. 1, а приводится исходное состояние трехслойной оболочки, состоящей из частей сферических поверхностей. Длина образующей и максимальный радиус внешней оболочки составляют $l_0 = 3$ м, $r = 1.5$ м. Радиус основания внешней оболочки равен $r_0 = r \sin(\pi - l_0/r)$. Коэффициент μ , входящий в (2.1), примем равным $\mu = 700$. Давление, действующее на внутреннюю оболочку, взято в виде половины скоростного напора. Безразмерное время определяется как $\tau = tV_0/l_0$, где $V_0 = 80$ м/с – характерная скорость. А безразмерное натяжение $\bar{T}_{ij} = T_{ij} / (T_b/l_0)$, где $T_b = \rho_0 (V_0 l_0)^2$, ρ_0 – плотность среды.

Пусть безразмерное давление во внутренней оболочке растет по линейному закону от нуля до величины $p^{(2)} = 0.25$ при времени $\tau = 0.8$, а затем оболочка раздувается давлением постоянной величины. В процессе раздува до формы равновесного состояния наполнитель частично обжимается и передает усилия на внешнюю оболочку.

Расчетные области покрыты нерегулярной сеткой 24×32 вдоль образующей и кольцевого направления. Уравнения динамики оболочек решаются методом конечных разностей по явной схеме.

Форма равновесного деформированного состояния приводится на рис. 1, б к моменту времени $\tau = 1.61$. Объем внутренней полости трехслойной оболочки в результате раздува увеличился с $V = 9.11$ м³ до $V = 14.0$ м³.

Максимальные осевые натяжения $\max T_{(2)}^{11} = 0.123$ реализуются на внутренней оболочке Ω_2 к моменту времени $\tau = 1.03$. А на наружной оболочке Ω_1 в момент времени $\tau = 1.05$ осевые натяжения составили $\max T_{(1)}^{11} = 0.113$. На рис. 2 приводится график поверхностных натяжений для равновесного состояния внутренней оболочки Ω_2 (на рисунках для наглядности сетки у вершин раздвинуты, как у основания).

Уровень окружных натяжений существенно ниже, чем осевых. Максимальные натяжения

$\max T_{(1)}^{22} = 0.049$ реализуются на наружной оболочке Ω_1 , а максимальные натяжения на внутренней оболочке Ω_2 $\max T_{(2)}^{22} = 0.054$. Уровень натяжений на внутренней оболочке Ω_2 несколько выше, чем в наружной Ω_1 , так как начальные геометрические размеры внутренней оболочки меньше, чем наружной.

Максимальное утонение $\max \lambda_3^{(2)} = 0.695$ реализуется на внутренней оболочке Ω_2 , на внешней оболочке Ω_1 $\max \lambda_3^{(1)} = 0.719$. На рис. 3 приводится график утонения $\lambda_3^{(2)} = 1 / (\lambda_1^{(2)} \lambda_2^{(2)})$ внутренней оболочки Ω_2 . Максимальные утонения соответствуют широкой части выпучивания оболочки в районе половины образующей, рис. 1, б.

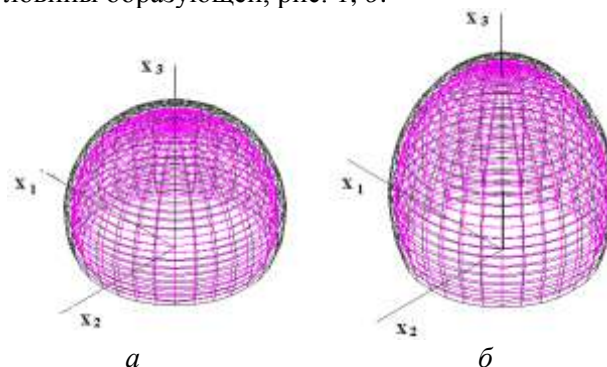


Рис. 1. Форма оболочек при времени $\tau = 0$ (а) и $\tau = 1.61$ (б)

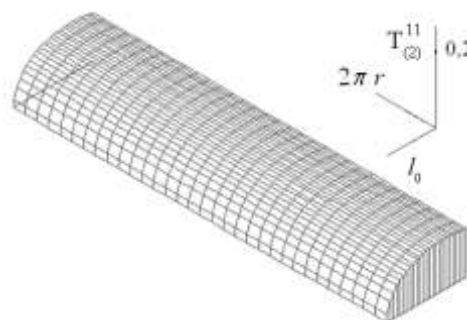


Рис. 2. Осевые поверхностные натяжения на оболочке Ω_2

4. О критическом режиме для статического состояния раздува оболочки. Рассмотрим поведение оболочки при возрастании давления на внутреннюю оболочку в диапазоне $p^{(2)} = 0.25 \div 0.50625$. Пусть давление в расчетах растет линейно до времени $\tau = 0.8$ и в дальнейшем сохраняет неизменную величину. Будем увеличивать значение давления дискретно

и при этих значениях проведем серию расчетов до формы равновесного состояния оболочки. При некотором значении давления система не будет выходить в равновесное состояние. Таким образом, определим порог статической устойчивости по наполняемости. Эти расчеты отражены на графике, рис. 4. При возрастании давления до $p^{(2)} = p_{кр}^{(2)} = 0.5015625$ оболочка принимает равновесную форму и объем внутренней полости достигает $V = 56.85 \text{ м}^3$ (рис. 5). Расчеты показывают, что областью статической устойчивости раздува оболочки является $p^{(2)} \leq p_{кр}^{(2)} = 0.5015625$. При численном интегрировании и приближении к равновесной форме добавка к параметру V по времени уменьшается, система стремится к равновесному состоянию. При $p^{(2)} > p_{кр}^{(2)} = 0.5015625$ добавка к параметру V увеличивается и происходят очень большие изменения формы оболочки при незначительном увеличении давления. Для данной задачи критическим давлением раздува статического состояния оболочки является $p_{кр}^{(2)} = 0.5015625$.

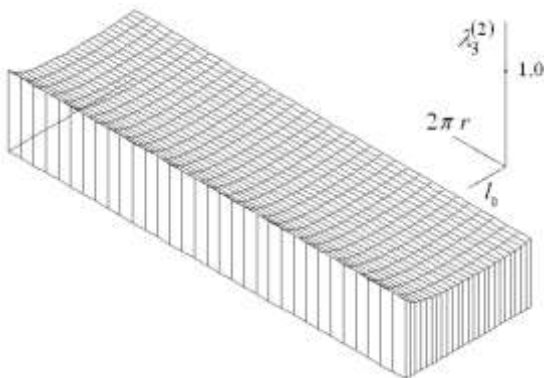


Рис. 3. Утонение во внутренней оболочке Ω_2

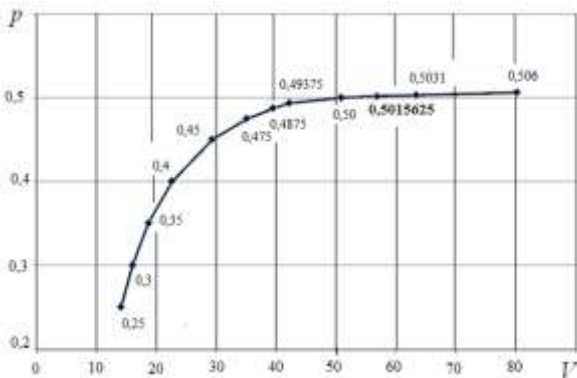


Рис. 4. К расчету критического давления $p_{кр}^{(2)} = 0.5015625$ раздува оболочки

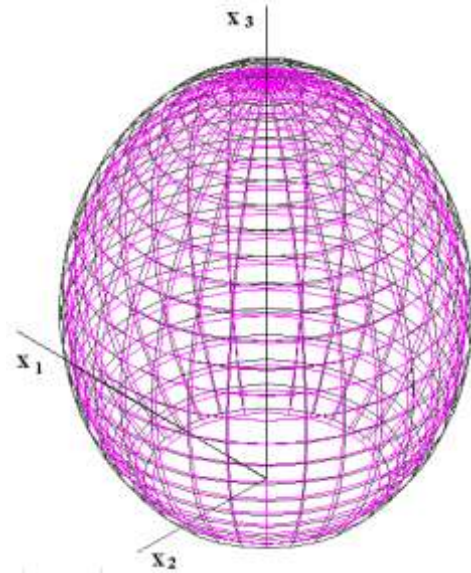


Рис. 5. Объем оболочки $V = 56.85 \text{ м}^3$ при давлении $p^{(2)} = p_{кр}^{(2)} = 0.5015625$

Выводы. Разработан алгоритм расчета динамики нагружения трехслойной резиноподобной оболочки. Проведен численный эксперимент. Установлен критический режим для статического состояния раздува оболочки. Дальнейшее развитие этого подхода, видимо, даст возможность на основе численных расчетов осуществить и выбор конструктивных параметров конструкции.

Литература

1. Куршин Л.М. Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек // Расчет пространственных конструкций. Вып. 7. М., 1962. С. 163–192.
2. Ильгамов М.А., Муштари Х.М. Некоторые задачи статической и динамической устойчивости трехслойных пластин с наполнителем // Труды Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. 1961. С. 155–163.
3. Прусаков А.П. Некоторые задачи изгиба круглых трехслойных пластин с легким наполнителем // Труды Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. 1961. С. 293–297.
4. Галимов Н.К. Осесимметричный изгиб трехслойных круглых пластин с легким сжимаемым наполнителем под действием равномерно-распределенной нагрузки // Исследования по теории пластин и оболочек. Сб. 4. Казань, 1966. С. 194–206.
5. Галимов Н.К., Паймушин В.Н., Снигирев В.Ф. Большие прогибы и устойчивость защемленной трехслойной круглой пластины при действии поперечной нагрузки // Труды 10 Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 1. 1975. С. 568–576.
6. Гиниятуллин А.Г., Гимадиев Р.Ш. Исследование наполнения оболочки баллонного катетера // Медицинская техника. 1993. Вып. 2. С. 30–33.
7. Гимадиев Р.Ш., Гимадиева Т.З., Паймушин В.Н. О динамическом процессе раздувания тонких оболочек из

эластомеров под действием избыточного давления // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 2. С. 236–248.

8. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л., 1986. 336 с.

9. Колпак Е.П. Устойчивость безмоментных оболочек при больших деформациях. СПб., 2000. 248 с.

References

1. Kurshin L.M. A review of works on analyzing three-layered plates and shells: Analysis of spatial structures. Issue 7. Moscow, GIFML, 1962, pp.163–192.

2. Ilgamov M.A., Mushtari Kh.M. Some problems of static and dynamic stability of three-layer plates with a filler. Trudy Vsesoyuznoy konferentsii po teorii plastin i obolochek. Kazan, 1961, pp. 155–163.

3. Prusakov A.P. Some problems of bending three-layered round plates with a light filler. Trudy Vsesoyuznoy konferentsii po teorii plastin i obolochek. Kazan, 1961, pp. 293–297.

4. Galimov N.K. Axisymmetric bending of three-layered round plates with a light compressible filler under the action of a uniformly distributed load. Issledovaniya po teorii plastin i obolochek. Sbornik 4. Kazan, 1966, pp. 194–206.

5. Galimov N.K., Paimushin V.N., Snigirev V.F. Large deflections and stability of a clamped three-layered circular plate under the action of a transverse load. Trudy 10 Vsesoyuznoy konferentsii po teorii plastin i obolochek. Vol. 1. Tbilisi, Metsniereba, 1975, pp. 568–576.

6. Giniyatullin A.G., Gimadiev R.Sh. Investigation on filling the shell of a balloon catheter. Meditsinskaya tekhnika, 1993, issue. 2, pp. 30–33.

7. Gimadiev R.Sh., Gimadieva T.Z., Paimushin V.N. On the inflation dynamic process of thin shells made of elastomers under the action of excessive pressure. Prikladnaya matematika i mekhanika, 2014, vol. 78, issue 2, pp. 236–248.

8. Chernykh K.F. Nonlinear theory of elasticity in mechanical engineering calculations. Leningrad, Mashinostroenie, 1986. 336 p.

9. Kolpak E.P. Stability of non-momentum shells under large deformations. St. Petersburg, 2000. 248 p.



MODELING THE DYNAMICS OF INFLATION OF THREE-LAYER RUBBER-LIKE SHELL WITH EXCESSIVE PRESSURE

© R.Sh. Gimadiev

Kazan State Energy University,
51, ulitsa Krasnoselskaya, Kazan, 420066, Russian Federation

The results of mathematical modeling of deformation of a three-layer shell located by the action of an arbitrary excess pressure are presented. Dynamics of inflation is calculated in a spatial formulation in the Cartesian coordinate system. Shells are described in Lagrangian curvilinear coordinates. Under the influence of pressure on the inner shell, the shell is deformed and moves in space, while the intermediate filler layer is crimped to a certain thickness and transfers the pressure to the outer shell. The inner shell, the filler and the outer shell interacting in space move each other in a dynamic mode to the shape of the equilibrium state. The spatial problem of the deformation of composite shells is solved by the method of finite differences according to the explicit scheme. The physical relationships for large deformations for the equation of motion of soft shells are taken from the data of experiments obtained by K.F. Chernykh for a rubber-like material. For rapidly flowing deformation processes, the component that takes into account the internal friction in the material of the shells is added to physical formulas, also improving the stability of the numerical calculation algorithm. As an example, we consider a three-layer shell consisting of parts of spherical surfaces with constant radiuses at the bases. The calculated area is covered by an irregular grid. The results of the calculation of changes in the shape of the shells to the shape of the equilibrium state during blowing are given. Changes in circumferential and axial tension during deformation are analyzed. The degree of flattening of deformable surfaces is also investigated. The results of calculating the maximum shear angles on the deformation surfaces are given. The extreme mode of the static state of the shell inflation is found.

Key words: Modeling, dynamics, rubber three-layer shell, inflation, numerical experiment, the loss of stability.