ФИЗИКА

УДК 514.742.24

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ, ПОЗВОЛЯЮЩЕМ ОПРЕДЕЛИТЬ ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ В R^n

© И.П. Попов

Целью работы является определение векторного произведения двух векторов $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в n-мерном евклидовом пространстве при $n > 3$. В работе применяются ортонормированные базисы. Доказывается теорема 1 (существования): *Для двух линейно независимых векторов* **a** *и* **b** *в многомерном пространстве существует их векторное произведение* $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. В основе доказательства лежит то, что если вектор **c** является при инвариантном описании векторным произведением векторов **a** и **b**, то его сущность в этом качестве не изменится при координатном описании в многомерном пространстве. Для целей рассмотрения определяются операции расщепления и симметричного расщепления базисного вектора $\mathbf{e}_i$, при которых он заменяется на несколько векторов, ортогональных друг другу и всем другим базисным векторам исходного базиса при соответствующем увеличении размерности пространства. Доказывается теорема 2: *Векторное произведение* $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *может быть представлено в многомерном пространстве*. В основе доказательства лежит симметричное расщепление базисного вектора. Тем самым решена некоторым образом обратная задача – при известном векторном произведении определение координат всех трех векторов в многомерном пространстве. Для преодоления неоднозначности при определении векторного произведения двух векторов в многомерном пространстве принимается условие 1: *Векторное произведение* $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *в* R^n *лежит на одной прямой с проекцией суммы базисных ортов на* $(n-2)$*-плоскость, перпендикулярную векторам* **a** *и* **b**. Для целей рассмотрения используются повороты координатных 2-плоскостей, с помощью которых можно изменять координаты i и j вектора, например, обнулять координату j. Для определения векторного произведения двух векторов в многомерном пространстве следует выполнить $3n - h - l - 3$ поворотов координатных 2-плоскостей. Здесь h – число ненулевых координат обоих векторов в новом базисе, l – число нулевых координат в исходном базисе.

Ключевые слова: векторное произведение, многомерное пространство, базис, расщепление.

В литературе широко используется скалярное произведение двух векторов $c = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ в многомерном пространстве [1–6]. Оно является обобщением скалярного произведения для двух и трехмерного случаев. Такое обобщение не представляло трудности, поскольку результат скалярного произведения в пространстве любой размерности однозначен. Иначе обстоит дело с векторным произведением, и бесконечность возможных решений является основной трудностью при обобщении его на многомерный ($n > 3$) случай. Задача, таким образом, состоит в разрешении этой трудности.

Далее применяются ортонормированные базисы [7–9].

***Теорема 1* (существования).** *Для двух линейно независимых векторов* **a** *и* **b** *в* R^n *существует их векторное произведение* $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Доказательство. Три линейно независимых вектора **a**, **b** и **g** имеют инвариантное описание, включающее в себя длины векторов, углы между ними и их взаимную ориентацию. Для каждого из этих трех векторов *однозначно* определена их проекция на любой другой вектор. Другими словами, определены их попарные скалярные произведения.

В этой связи векторы **a**, **b** и **g** могут иметь *однозначное* координатное описание в базисах любой размерности, начиная с 3 (пассивная точка зрения (alias)). При координатном описании они сохраняют размеры, углы между ними и взаимную ориентацию, поскольку в базисе любой размерности их попарные скалярные произведения остаются неизменными. Другими словами, координатное описание той или иной размерности при пассивной точке зрения не меняет сущность векторов и их отношений друг к другу. Следовательно, если в качестве вектора **g** рассматривать вектор **c**, являющийся при инвариантном описании векторным произведением векторов **a** и **b**, то его сущность в этом качестве не изменится при координатном описании в R^n. Теорема доказана.

ПОПОВ Игорь Павлович, Центр высоких технологий, г. Курган, e-mail: ip.popow@yandex.ru

Расщепление базисных векторов.

Определение 1. *m-расщеплением базисного вектора $\mathbf{e}_i$ является трансформация R^n в R^{n+m-1} путем замены $\mathbf{e}_i$ на m векторов $\mathbf{e}_{i1},\dots,\mathbf{e}_{ij},\dots,\mathbf{e}_{im}$, ортогональных друг другу и всем другим базисным векторам исходного базиса, при этом $\mathbf{e}_i=\sum_{j=1}^{m}k_{ij}\mathbf{e}_{ij}$, где k_{ij} – направляющие косинусы $\mathbf{e}_i$ в базисе $\mathbf{e}_{i1},\dots,\mathbf{e}_{ij},\dots,\mathbf{e}_{im}$.*

Выбор направляющих косинусов k_{ij} может быть сопряжен с произволом. Произвол минимизируется при *симметричном* m-расщеплении.

Определение 2. *Симметричное m-расщепление базисного вектора – это m-расщепление, при котором $\forall j\in[1,m]\,\big|\,k_{ij}=\dfrac{\left|\sqrt{m}\right|}{m}$.*

Представление векторного произведения двух векторов в R^n.

Теорема 2. *Векторное произведение* $\mathbf{c}=[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ *может быть представлено в* R^n.

Доказательство. Пусть в R^3 имеются два линейно независимых вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Их координаты равны

$$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\0\end{pmatrix}\text{ и } b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\0\end{pmatrix}.$$

Для векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в R^3 определено векторное произведение $\mathbf{c}=[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Его координаты равны $c=\begin{pmatrix}0\\0\\c_3\end{pmatrix}$.

Базисный вектор $\mathbf{e}_3$ подвергается симметричному $(n-2)$-расщеплению. В образовавшемся R^n (в базисе ${}^1\mathbf{e}_1,{}^1\mathbf{e}_2,\dots,{}^1\mathbf{e}_n$) имеют место все три вектора (пассивная точка зрения), координаты которых соответственно равны

$${}^1a=\begin{pmatrix}{}^1a_1\\{}^1a_2\\0_3\\\vdots\\0_n\end{pmatrix},\ {}^1b=\begin{pmatrix}{}^1b_1\\{}^1b_2\\0_3\\\vdots\\0_n\end{pmatrix},\ {}^1c=\begin{pmatrix}0_1\\0_2\\{}^1c_3\\\vdots\\{}^1c_n\end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь $\forall i\in[3,n]\,\big|\ {}^1c_i=\dfrac{\left|\sqrt{n-2}\right|}{n-2}c_3$.

Произвольная квадратная матрица отображения T позволяет получить координаты всех трех векторов в другом базисе этой же размерности ${}^2\mathbf{e}_1,{}^2\mathbf{e}_2,\dots,{}^2\mathbf{e}_n$:

$${}^2a=T\cdot{}^1a=\begin{pmatrix}{}^2a_1\\\vdots\\{}^2a_n\end{pmatrix},\ {}^2b=T\cdot{}^1b=\begin{pmatrix}{}^2b_1\\\vdots\\{}^2b_n\end{pmatrix},$$

$${}^2c=T\cdot{}^1c=\begin{pmatrix}{}^2c_1\\\vdots\\{}^2c_n\end{pmatrix}. \quad (2)$$

Таким образом, в произвольном базисе ${}^2\mathbf{e}_1,{}^2\mathbf{e}_2,\dots,{}^2\mathbf{e}_n$ для двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеет место их векторное произведение $\mathbf{c}=[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ с координатами (2). Теорема доказана.

Тем самым решена некоторым образом обратная задача – при известном векторном произведении определение координат всех трех векторов в R^n.

Пример 1. В R^3 координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равны $a=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$.

Координаты векторного произведения $\mathbf{c}=[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ равны $c=\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}$.

Базисный вектор $\mathbf{e}_3$ подвергается симметричному 2-расщеплению. В образовавшемся R^4 координаты векторов равны

$${}^1a=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\0\end{pmatrix},\ {}^1b=\begin{pmatrix}0\\5\\0\\0\end{pmatrix},\ {}^1c=\begin{pmatrix}0\\0\\7{,}071\\7{,}071\end{pmatrix}.$$

Произвольная квадратная матрица отображения

$$T=\begin{pmatrix}0{,}497 & 0{,}628 & 0{,}287 & -0{,}527\\0{,}47 & 0{,}22 & -0{,}814 & 0{,}262\\-0{,}171 & 0{,}604 & 0{,}296 & 0{,}72\\0{,}709 & -0{,}439 & 0{,}41 & 0{,}369\end{pmatrix}$$

позволяет получить координаты всех трех векторов в другом базисе этой же размерности

$$
{}^2a = T \cdot {}^1a = \begin{pmatrix} 2,876 \\ 1,599 \\ 1,47 \\ 0,101 \end{pmatrix}, \quad {}^2b = T \cdot {}^1b = \begin{pmatrix} 3,138 \\ 1,099 \\ 3,02 \\ -2,197 \end{pmatrix},
$$

$$
{}^2c = T \cdot {}^1c = \begin{pmatrix} -1,695 \\ -3,902 \\ 7,184 \\ 5,503 \end{pmatrix}.
$$

Здесь **c** = [**a**, **b**].

Ориентация векторного произведения. В R^3 вектор **c** = [**a**, **b**] лежит на линии пересечения плоскостей, нормалями которых являются векторы **a** и **b** или в терминах многомерного пространства – в 1-плоскости, образованной пересечением двух 2-плоскостей. В этой 1-плоскости можно построить два противоположно направленных вектора, величина которых равна модулю векторного произведения, и ортогональных векторам **a** и **b**. Формально концы этих векторов образуют в 1-плоскости 0-сферу.

В R^4 векторы **a** и **b** служат нормалями двум 3-плоскостям, пересечением которых является 2-плоскость, все векторы которой ортогональны векторам **a** и **b**. Концы векторов, величина которых равна модулю векторного произведения, образуют в этой 2-плоскости 1-сферу (окружность).

В R^n векторы **a** и **b** служат нормалями двум $(n-1)$-плоскостям, пересечением которых является $(n-2)$-плоскость. Концы векторов, величина которых равна модулю векторного произведения, и ортогональных векторам **a** и **b**, образуют в этой $(n-2)$-плоскости $(n-3)$-сферу.

И в R^3 и в R^n имеет место неоднозначность при выборе направления векторного произведения двух векторов. В R^3 приходится выбирать из векторов, ограниченных 0-сферой, в R^n – из векторов, ограниченных $(n-3)$-сферой.

В R^3 неоднозначность преодолевается постулированием – в качестве направления **c** выбирается вектор правый относительно **a** и **b**.

Неоднозначность в R^n может быть преодолена так же, как и в R^3 – выбором одного наиболее подходящего варианта.

По аналогии с взаимным расположением вектора **c** и вектора, являющегося суммой базисных ортов, имеющем место для частного случая (1), для произвольного базиса можно принять следующее

Условие 1. *Векторное произведение* **c** = [**a**, **b**] *в* R^n *лежит на одной прямой с проекцией суммы базисных ортов на* $(n-2)$-*плоскость, перпендикулярную векторам* **a** *и* **b**.

Векторное произведение в R^3 формально удовлетворяет условию 1.

Повороты координатных 2-плоскостей. Пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ вектор **d** имеет координаты *d*.

Повороту *ij*-й координатной 2-плоскости соответствует следующая матрица перехода:

$$
T_{ij} = \begin{pmatrix}
1_{11} & 0_{12} & \cdots & 0_{1i} & \cdots & 0_{1j} & \cdots & 0_{1n} \\
0_{21} & 1_{22} & \cdots & 0_{2i} & \cdots & 0_{2j} & \cdots & 0_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0_{i1} & 0_{i2} & \cdots & \cos\varphi & \cdots & \sin\varphi & \cdots & 0_{in} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0_{j1} & 0_{j2} & \cdots & -\sin\varphi & \cdots & \cos\varphi & \cdots & 0_{jn} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0_{n1} & 0_{n2} & \cdots & 0_{ni} & \cdots & 0_{nj} & \cdots & 1_{nn}
\end{pmatrix}. \quad (3)
$$

При этом cosφ и sinφ находятся из условия

$$
d_i \cos\varphi + d_j \sin\varphi = {}^1d_i,
$$

$$
-d_i \sin\varphi + d_j \cos\varphi = {}^1d_j.
$$

$$
{}^1d_j = 0, \text{ если } \cos\varphi = \frac{d_i}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}},
$$

$$
\sin\varphi = \frac{d_j}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}}.
$$

При этом ${}^1d_i = \sqrt{d_i^2 + d_j^2}$.

Все другие координаты остаются без изменения.

Таким образом, поворотом *ij*-й координатной 2-плоскости в соответствии с матрицей перехода T_{ij} можно изменять координаты *i* и *j* вектора **d**, например, обнулять координату *j*.

Определение векторного произведения двух векторов в R^n**.** Пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ векторы **a** и **b** имеют координаты

$$
a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.
$$

Координаты суммы базисных ортов **s** равны $s = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для перехода к новому базису ${}^*\mathbf{e}_1, {}^*\mathbf{e}_2, ..., {}^*\mathbf{e}_n$, в котором векторы **a**, **b** и **s** будут иметь координаты

$$ {}^*a = \begin{pmatrix} {}^*a_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}, \; {}^*b = \begin{pmatrix} {}^*b_1 \\ {}^*b_2 \\ 0_3 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}, \; {}^*s = \begin{pmatrix} {}^*s_1 \\ {}^*s_2 \\ {}^*s_3 \\ \vdots \\ {}^*s_n \end{pmatrix}, $$

$$ \forall i \in [3, n] \Big| \; {}^*s_i = \frac{\sqrt{n - {}^*s_1^2 - {}^*s_2^2}}{n-2}, $$

следует выполнить $3n - h - l - 3$ поворотов координатных 2-плоскостей. Здесь h – число ненулевых координат обоих векторов в новом базисе, l – число нулевых координат в исходном базисе. В рассматриваемом случае $h = 3$. Каждому повороту соответствует своя матрица T_k типа (3).

Матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ к базису ${}^*\mathbf{e}_1, {}^*\mathbf{e}_2, ..., {}^*\mathbf{e}_n$ равна

$$ T = \prod_{k=3n-h-l-3}^{1} T_k, $$

[10], т.е. перемножение производится в обратной последовательности. При этом

$$ {}^*a = Ta, \; {}^*b = Tb, \; {}^*s = Ts. $$

Координаты вектора **c** = [**a**, **b**] в новом базисе ${}^*\mathbf{e}_1, {}^*\mathbf{e}_2, ..., {}^*\mathbf{e}_n$ в соответствии с условием 1 равны

$$ {}^*c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^*c_3 \\ \vdots \\ {}^*c_n \end{pmatrix}, \; \forall i \in [3, n] \Big| \; {}^*c_i = \frac{\sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}}{n-2}, $$

$$ i \in [3, n]. \tag{4} $$

Знак радикала в (4) выбирается таким образом, чтобы вектор **c** образовывал с **a** и **b** правую тройку векторов.

Координаты вектора **c** = [**a**, **b**] в исходном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ равны

$$ c = T^{-1} \cdot {}^*c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. $$

Результатом объединения классического инвариантного определения векторного произведения двух векторов и условия 1 является

Определение 3. *Векторное произведение* **c** = [**a**, **b**] *двух линейно независимых векторов* **a** *и* **b** *в* R^n *есть вектор, лежащий на одной прямой с проекцией суммы базисных ортов на* $(n-2)$*-плоскость, перпендикулярную векторам* **a** *и* **b**, *модуль его равен* $\left|\sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}\right|$, *при этом векторы* **a**, **b** и **c** *образуют правую тройку векторов.*

Это определение при $n = 3$ полностью удовлетворяет классическому векторному произведению.

При $n > 3$ свойства векторного произведения, указанные в определении 3, не отличаются от классического трехмерного аналога, за исключением того, что вектор **c** = [**a**, **b**] содержит не 3, а n компонент.

Замечание 1. Если $\forall i \in [3, n] \Big| \; {}^*s_i = 0$, т.е. сумма базисных ортов **s** линейно зависима от векторов **a** и **b**, то их векторное произведение в соответствии с условием 1 неопределимо.

Пример 2. В R^4 по известным значениям **a** и **b** отыскать **c** = [**a**, **b**].

$$ a = \begin{pmatrix} 3{,}37 \\ 2{,}762 \\ -2{,}395 \\ -0{,}532 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 3{,}289 \\ 1{,}539 \\ -5{,}697 \\ 1{,}834 \end{pmatrix}. $$

$$ T_1 = \begin{pmatrix} 0{,}988 & 0 & 0 & -0{,}156 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}156 & 0 & 0 & 0{,}988 \end{pmatrix}, $$

$$ {}^1a = T_1 a = \begin{pmatrix} 3{,}411 \\ 2{,}762 \\ -2{,}395 \\ 0 \end{pmatrix}. $$

$$ T_2 = \begin{pmatrix} 0{,}818 & 0 & -0{,}575 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}575 & 0 & 0{,}818 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, $$

$$^2a = T_2 \cdot {}^1a = \begin{pmatrix} 4{,}168 \\ 2{,}762 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0{,}834 & 0{,}552 & 0 & 0 \\ -0{,}552 & 0{,}834 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$^3a = T_3 \cdot {}^2a = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$T_{31} = T_3T_2T_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}674 & 0{,}552 & -0{,}479 & -0{,}106 \\ -0{,}447 & 0{,}834 & 0{,}317 & 0{,}07 \\ 0{,}568 & 0 & 0{,}818 & -0{,}09 \\ 0{,}156 & 0 & 0 & 0{,}988 \end{pmatrix},$$

$$^3b = T_{31}b = \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ -1{,}865 \\ -2{,}96 \\ 2{,}324 \end{pmatrix}.$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}626 & 0 & 0{,}78 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}78 & 0 & -0{,}626 \end{pmatrix},$$

$$^4b = T_4 \cdot {}^3b = \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ 2{,}98 \\ -2{,}96 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}709 & -0{,}705 & 0 \\ 0 & 0{,}705 & 0{,}709 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$^5b = T_5 \cdot {}^4b = \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ 4{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$T_{51} = T_5T_4T_{31} = T_5T_4T_3T_2T_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}674 & 0{,}552 & -0{,}479 & -0{,}106 \\ -0{,}115 & -0{,}37 & -0{,}718 & 0{,}578 \\ 0{,}685 & -0{,}368 & 0{,}441 & 0{,}448 \\ 0{,}251 & -0{,}65 & -0{,}248 & -0{,}673 \end{pmatrix}.$$

Сумма ортов исходного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ в базисе ${}^5\mathbf{e}_1, {}^5\mathbf{e}_2, {}^5\mathbf{e}_3, {}^5\mathbf{e}_4$ имеет координаты

$$^5s = T_{51}s = T_{51}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}641 \\ -0{,}625 \\ 1{,}207 \\ -1{,}32 \end{pmatrix}.$$

$$T_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}045 & -0{,}999 \\ 0 & 0 & 0{,}999 & -0{,}045 \end{pmatrix},$$

$$^6s = T_6 \cdot {}^5s = \begin{pmatrix} 0{,}641 \\ -0{,}625 \\ 1{,}265 \\ 1{,}265 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от исходного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ к базису ${}^6\mathbf{e}_1, {}^6\mathbf{e}_2, {}^6\mathbf{e}_3, {}^6\mathbf{e}_4$ равна

$$T_{61} = T_6T_{51} = T_6T_5T_4T_3T_2T_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}674 & 0{,}552 & -0{,}479 & -0{,}106 \\ -0{,}115 & -0{,}37 & -0{,}718 & 0{,}578 \\ -0{,}281 & 0{,}666 & 0{,}228 & 0{,}652 \\ 0{,}673 & -0{,}338 & 0{,}451 & 0{,}478 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ${}^6a = T_{61}a = {}^3a$, ${}^6b = T_{61}b = {}^5b$, ${}^6s = T_{61}s$.

Координаты вектора $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в последнем базисе ${}^6\mathbf{e}_1, {}^6\mathbf{e}_2, {}^6\mathbf{e}_3, {}^6\mathbf{e}_4$ в соответствии с (4) равны

$$^6c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14{,}849 \\ 14{,}849 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в исходном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ равны

$$c = T_{61}^{-1} \cdot {}^6c = \begin{pmatrix} 5{,}822 \\ 4{,}869 \\ 10{,}081 \\ 16{,}786 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Порядок обнуления координат и, следовательно, значения промежуточных матриц могут быть иными. При этом нетрудно убедиться, что итоговая матрица T (T_{61}) и значение вектора **c** в исходном базисе не изменяются.

Применение векторного произведения двух векторов в R^n в физических задачах. В релятивистской электродинамике рассматривается четырехмерное пространство Минковского. Электромагнитная волна в этом пространстве также имеет две составляющие: вектор **e** напряженности электрического поля и вектор **h** напряженности магнитного поля. Вектор Умова–Пойнтинга **u**, характеризующий движение энергии, по определению равен векторному произведению **u** = [**e**, **h**]. Однако до сих пор для его нахождения приходилось прибегать к лоренцевой калибровке, которая сокращает число компонент векторов **e**, **h** и **u** до трех, но в то же время порождает неоднозначность в определении векторов, которую приходится преодолевать путем введения дополнительных условий. Полученный в настоящей работе результат позволяет устанавливать векторное произведение **u** = [**e**, **h**] непосредственно в R^4, избегая неоднозначности и дополнительных условий.

Многомерная геометрия в настоящее время широко применяется и в других разделах физики для представления уравнений с несколькими неизвестными, функций нескольких переменных и систем с несколькими степенями свободы, а также собственных векторов и инвариантных подпространств линейных операторов в квантовой механике [1, 3, 6]. Дополнение арсенала ее средств векторным произведением двух векторов создает дополнительные возможности для теоретических исследований.

Литература

1. Напалков В.В. Изоморфизм гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром и пространство состояний квантовомеханической системы // Известия Уфимского научного центра РАН. 2017. № 1. С. 5–8.

2. Банару М.Б. Аксиома сасакиевых гиперповерхностей и 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры октав // Математические заметки. 2016. Т. 100, вып. 4. С. 597–618.

3. Шведов О.Ю. О функциональных пространствах для квантовых систем со связями // Математические заметки. 2016. Т. 99, вып. 1. С. 140–144.

4. Дюкарев Ю.М. Геометрические и операторные меры вырожденности множества решений матричной проблемы моментов Стилтьеса // Математический сборник. 2016. Т. 207, № 4. С. 47–64.

5. Ахунжанов Р.К. О векторах заданного диофантова типа II // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 4. С. 3–24.

6. Аминов Ю.А. Геометрия волновых функций электрона // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 2. С. 3–30.

7. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.

8. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Мир, 1957.

9. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1968.

10. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. М.: Мир, 1977.

References

1. Napalkov V.V. Isomorphism of reproducing kernel Hilbert spaces and state space in quantum-mechanical system. Izvestiya Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN, 2017, no. 1, pp. 5–8.

2. Banaru M.B. The axiom of Sasakian hypersurfaces and six-dimensional Hermitian submanifolds of the octonian algebra. Matematicheskie zametki, 2016, vol. 100, issue 4, pp. 597–618.

3. Shvedov O.Yu. On functional spaces for bonded quantum systems. Matematicheskie zametki, 2016, vol. 99, issue 1, pp. 140–144.

4. Dyukarev Yu.M. Geometric and operator measures of degeneracy for the set of solutions to the Stieltjes matrix moment problem. Matematicheskiy sbornik, 2016, vol. 207, no. 4, pp. 47–64.

5. Akhuzhanov R.K. Vectors of a given Diphantine type. II. Matematicheskiy sbornik, 2013, vol. 204, no. 4, pp. 3–24.

6. Aminov Yu.A. The geometry of electron wave functions. Matematicheskiy sbornik, 2013, vol. 204, no. 2, pp. 3–30.

7. Rozenfeld B.A. Multidimensional spaces. Moscow, Nauka, 1966. 668 p.

8. Madelung E. Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Russian Edition: Matematicheskiy apparat fiziki. Moscow, Mir, 1957. 620 p.

9. Spivak M. Calculus on manifolds. Russian edition: Matematicheskiy analiz na mnogoobraziyakh. Moscow, Mir, 1968. 164 p.

10. Faith C. Algebra: Rings, modules and categories. Vol. 1. Russian edition: Algebra: Koltsa, moduli i kategorii. Moscow, Mir, 1977. 668 p.

ON ONE CONDITION THAT ALLOWS TO DETERMINE THE VECTOR PRODUCT OF TWO VECTORS IN R^n

© I.P. Popov

High Technology Centre
106, ulitsa Tomina, 640002, Kurgan, Russian Federation

The aim of the paper is to define the vector product of two vectors $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ in n-dimensional Euclidean space for $n > 3$. Orthonormal bases are used in this paper. Theorem 1 (existence) is proved: *For two linearly independent vectors* **a** *and* **b** *in a multidimensional space, their vector product* $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *exists*. The proof is based on the fact that if the vector **c** is an invariant description of the vector product of vectors **a** and **b**, then its essence in this quality will not change under a coordinate description in a multidimensional space. For the purpose of consideration, splitting and symmetric splitting operations of the basis vector $\mathbf{e}_i$ are defined, under which it is replaced by several vectors orthogonal to each other and all other basis vectors of the original basis with a corresponding increase in the dimension of the space. Theorem 2 is proved: *The vector product* $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *can be represented in a multidimensional space*. The proof is based on the symmetric splitting of the basis vector. In this way, the inverse problem is solved in some way-for a known vector product, the definition of the coordinates of all three vectors in a multidimensional space. To overcome the ambiguity in the definition of the vector product of two vectors in a multidimensional space, condition 1 is adopted: *The vector product* $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *in* R^n *lies on one line with the projection of the sum of the basis vectors on the* $(n - 2)$*-plane perpendicular to the vectors* **a** *and* **b**. For the purposes of consideration, rotations of the coordinate 2-planes are used, with the help of which it is possible to change the coordinates i and j of the vector, for example, to zero the coordinate j. To determine the vector product of two vectors in a multidimensional space, $3n - h - l - 3$ rotations of coordinate 2-planes must be performed. Here h is the number of nonzero coordinates of both vectors in the new basis, l is the number of zero coordinates in the original basis.

Key words: vector product, multidimensional space, basis, splitting.