ФИЗИКА

УДК 517.586, 517.588
DOI: 10.31040/2222-8349-2021-0-4-9-15

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПАРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ВИДЕ МНОГОМЕРНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ В ПЕРЕМЕННЫХ ЯКОБИ ДЛЯ ЗАДАЧ МНОГИХ ТЕЛ

© Р.Ф. Ахметьянов, Е.С. Шиховцева

Скалярные степенные функции вида $\left|\mathbf{x}_1+\ldots+\mathbf{x}_N\right|^{-\nu}\in\mathbb{R}$ в некоторых случаях встречаются в физических задачах и приложениях, особенно в задачах многих тел при парных взаимодействиях. Существуют известные разложения для двух векторов в трехмерном пространстве. В этой работе мы рассматриваем аналогичные разложения с любым количеством N произвольных M-мерных векторов в евклидовом пространстве в виде произведения от многомерного рационального ряда по пространственным переменным и гиперсферическим функциям на единичной сфере S^{M-1}. Такое преимущество разложения возникает в задачах трех тел при решении уравнения Фадеева, где известно, что основной проблемой является приближенный выбор аппроксимации потенциалов взаимодействия, при котором *t*-матричные элементы рассеяния приобретали сепарабельный вид.

Ключевые слова: обобщенная гипергеометрическая функция, гиперсферическая функция, функция Гегенбауэра.

Введение и обозначения. Скалярные степенные функции вида $\left|\mathbf{x}_1+\ldots+\mathbf{x}_N\right|^{-\nu}$ иногда часто встречаются в физических задачах и приложениях, особенно в задачах многих тел при парных взаимодействиях. Так, к примеру, для четырех частиц с координатой и массой $\mathbf{r}_\beta, m_\beta$, $\beta=1,\ldots,4$ при переходе к переменным Якоби $\mathbf{x}_\alpha$, $\alpha=1,\ldots,4$ вида

$$\mathbf{y}_\alpha=\lambda_\alpha\left(-\mathbf{r}_{\alpha+1}+\frac{\sum_{\beta=1}^{\alpha}m_\beta\mathbf{r}_\beta}{\sum_{\beta=1}^{\alpha}m_\beta}\right),\quad \alpha=1,2,3$$

$$\mathbf{y}_4=\lambda_4\frac{\sum_{\beta=1}^{4}m_\beta\mathbf{r}_\beta}{\sum_{\beta=1}^{4}m_\beta}$$

потенциалы взаимодействия в переменных Якоби, например между частицами 1 и 4, а также 2 и 4 принимают следующий вид:

$$\left|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4\right|^{-\nu}=\left|\frac{m_2}{\lambda_1\left(m_1+m_2\right)}\mathbf{y}_1+\frac{m_3}{\lambda_2\left(m_1+m_2+m_3\right)}\mathbf{y}_2+\frac{1}{\lambda_3}\mathbf{y}_3\right|^{-\nu}$$

$$\left|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_4\right|^{-\nu}=\left|\frac{-m_1}{\lambda_1\left(m_1+m_2\right)}\mathbf{y}_1+\frac{m_3}{\lambda_2\left(m_1+m_2+m_3\right)}\mathbf{y}_2+\frac{1}{\lambda_3}\mathbf{y}_3\right|^{-\nu},$$

где, как мы видим, имеет структуру вышеупомянутого вида при нормировке векторов $\mathbf{x}_\alpha=c\mathbf{y}_\alpha$ с определенными константами.

Известное разложения скалярной функции от трехмерных векторов $\mathbf{x}_s=r_s\zeta^{(s)}$, $\left|\mathbf{x}_s\right|=r_s$ по сферическим функциям

$$\frac{1}{\left|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right|}=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{l,m}\left(\zeta^{(1)}\right)Y_{l,m}\left(\zeta^{(2)}\right)^*$$

$$r_<=\min\left(r_1,r_2\right),\quad r_>=\max\left(r_1,r_2\right)\qquad(1.1)$$

широко используется в физических и математических задач, обладающих сферической симметрией. Однако, возможно, особый интерес в физических и математических приложениях и задачах представляет не разделение по

АХМЕТЬЯНОВ Роберт Фанилович, Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, e-mail: robertu@mail.ru
ШИХОВЦЕВА Елена Сергеевна – д.ф.-м.н., Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, e-mail: elshik@anrb.ru

отдельности угловым $\zeta^{(s)}$ и пространственным r_s переменным, как в (1.1), а разделение по векторам $\mathbf{x}_s = \left\{ r_s, \zeta^{(s)} \right\}$.

Как было показано в [1], такое разделение существует для трехмерных двух векторов, (и для всех действительных $\nu < 3$)

$$\frac{1}{\left|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right|^{\nu}} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(r_1^2+1\right)^{\frac{3-\nu}{2}}\left(r_2^2+1\right)^{\frac{3-\nu}{2}} \times$$
$$\times \sum_{n=l+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=+l}\frac{\Gamma\left(n-1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(n+2-\frac{\nu}{2}\right)} H_{nlm}\left(\mathbf{x}_1\right) H_{nlm}\left(\mathbf{x}_2\right)^* \tag{1.2}$$

и в конечных результатах переменные $\zeta^{(s)}$ и r_s будут входить равноправно как $\mathbf{x}_s = r_s \zeta^{(s)}$. К примеру, в задачах многих тел [2, 3] появляется возможность не разделять отдельно гиперсферические угловые функции и решать отдельно систему по пространственным координатам, а решать общую систему по полным векторам $\mathbf{x}_s$. В случае обратных степенных потенциалов взаимодействия (например, кулоновских), а также знание представления вида (1.2) для $\left|\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_N\right|^{-\nu} \in \mathbb{R}$ по определенным ортогональным функциям $H_{n,l,m}\left(\mathbf{x}_s\right)$ и соответствующими коэффициентами разложения, можно всегда факторизовать t-матричные элементы рассеяния и привести интегральные уравнения Фаддеева к системе алгебраических уравнений.

Везде и в дальнейшем $C_{\mu}^{\alpha}(z)$ – функция Гегенбауэра.

Под символами $(a)_k$ будет означаться символ Похгаммера

$$(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1), \quad a_0 = 1$$

или через Гамму функцию Γ

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}.$$

Обобщенная гипергеометрическая функция есть как

$${}_pF_q\left[\left.\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right| z\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_p)_k}{(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}$$

$$(a_p) = a_1, \ldots, a_p, \quad \prod_p (a_p)_k = \prod_{j=1}^{p}(a_j)_k.$$

Многомерные единичные вектора в M-мерном евклидовом пространстве мы будем обозначать как $\zeta^{(s)}$, где s будет означать принадлежность (номер) вектора. Мы не будем конкретизировать выбор полярных координат и их компонентов, всего их может существовать $\frac{(2M-2)!}{M!(M-1)!}$ эквивалентных представлений. Соответственно, столько же эквивалентных представлений существует и для гиперсферических функции $Y_{l_s,\mathbf{m}_\mathbf{k}^{(s)}}\left(\zeta^{(s)}\right)$ $\mathbf{m}_\mathbf{k}^{(s)} = \left\{ l_s = m_0^{(s)}, \ldots, m_{M-2}^{(s)} \right\}$, здесь s также означает принадлежность индексов к соответствующему единичному вектору. Теория гиперсферических функций хорошо изложена, к примеру [2], [4, гл. 11]. При этом будем полагать такой выбор этих функции, при котором

$$\int d\Omega_\zeta Y_{l_1,\mathbf{m}_\mathbf{k}^{(1)}}(\zeta) Y_{l_2,\mathbf{m}_\mathbf{k}^{(2)}}(\zeta)^* = \delta_{l_1,l_2}\delta_{\mathbf{m}_\mathbf{k}^{(1)},\mathbf{m}_\mathbf{k}^{(2)}}$$
$$\delta_{\mathbf{m}_\mathbf{k}^{(1)},\mathbf{m}_\mathbf{k}^{(2)}} = \delta_{m_1^{(1)},m_1^{(2)}}\ldots\delta_{m_{M-2}^{(1)},m_{M-2}^{(2)}}.$$

Здесь и в других разделах интеграл по поверхности единичной гиперсферы $\int d\Omega_\zeta f(\zeta)$ подразумевается, что интегрирование берется по всему M–1-мерному пространству. Для произвольной системы гиперсферических координат элемент объема и его площадь M–1-мерной сферы представляются соотношениями соответственно как [4, гл. 11]

$$dV_M = r^{M-1} dr\, d\Omega_\zeta, \quad S_M = \frac{2\pi^{\frac{M}{2}}}{\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)}.$$

Представление (1.1) для нескольких *M*-мерных векторов.

Покажем, что для произвольных M-мерных векторов $\mathbf{x}_s = r_s\zeta^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots, N$, *где* $\zeta^{(s)}$ *– единичные M-мерные вектора в евклидовом пространстве, а также для любых* $\nu \in \mathbb{R}$ *для однородных функций* $\left|\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_N\right|^{-\nu} \in \mathbb{R}$ *справедливо выражение*

$$\left|\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_N\right|^{-\nu} =$$
$$= \frac{1}{(r_N)^{\nu}}\sum_{l_1,\ldots,l_N=0}^{\infty}(-1)^{l_N} V_{l_1,\ldots,l_N}\left(\zeta^{(1)},\ldots,\zeta^{(N)}\right)\times \tag{2.1}$$
$$\times \sum_{\substack{\mu_1=0,\\ \ldots\ldots\\ \mu_{N-1}=0}}^{\infty}\frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)_{\mu_1+\ldots+\mu_{N-1}+l}\left(\frac{\nu-M+2}{2}\right)_{\mu_1+\ldots+\mu_{N-1}+l-l_N}}{\prod_{p=1}^{N-1}\left(\left(\frac{M}{2}\right)_{l_p+\mu_p}\mu_p!\right)}\prod_{p=1}^{N-1}\left(\frac{r_p}{r_N}\right)^{l_p+2\mu_p},$$

где

$$l=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} l_p,\quad \max\left(r_1,\ldots,r_N\right)=r_N,$$

а коэффициентная угловая функция выражается через гиперсферические функции $Y_{l,\mathbf{m_k}}\left(\zeta\right)$ *или через функции Гегенбауэра от скалярных произведений единичных векторов* $C_{l_i}^{\frac{M}{2}-1}\left(\left(\zeta^{(i)}\zeta\right)\right)$ *как*

$$V_{l_1,\ldots,l_N}\left(\zeta^{(1)},\ldots,\zeta^{(N)}\right)=$$

$$=\int\frac{d\Omega_\zeta}{S_M}\prod_{i=1}^{N}\frac{l_i+\frac{M}{2}-1}{\frac{M}{2}-1}C_{l_i}^{\frac{M}{2}-1}\left(\left(\zeta^{(i)}\zeta\right)\right)= \qquad (2.2)$$

$$=\left(S_M\right)^{N-1}\sum_{\mathbf{m}_\mathbf{k}^{(1)},\ldots,\mathbf{m}_\mathbf{k}^{(N)}}\prod_{p=1}^{N}Y_{l_p,\mathbf{m}_\mathbf{k}^{(p)}}\left(\zeta^{(p)}\right)\int d\Omega_\zeta\prod_{p=1}^{N}Y_{l_p,\mathbf{m}_\mathbf{k}^{(p)}}\left(\zeta\right)^*.$$

Выбор формы записи коэффициентной угловой функции обусловлен тем, что при, допустим, $l_n=0$ уменьшается порядок *N*. То есть при нулевых l_n их можно отпускать и не вписывать, например $V_{0,l_2,l_3,0,l_5}\left(\zeta^{(1)},\zeta^{(2)},\zeta^{(3)},\zeta^{(4)},\zeta^{(5)}\right)=V_{l_2,l_3,l_5}\left(\zeta^{(2)},\zeta^{(3)},\zeta^{(5)}\right)$. Следует отметить, что (2.2) отлично от нуля, когда $\sum_{p=1}^{N}l_p$ является четным числом, а следовательно, l – целое число. При $\nu = -2q$, q = = 1,2,3,… суммы в (2.1) конечны, так как при $\left(-q\right)_{\mu_1+\ldots+\mu_{N-1}+l}\neq 0$ (даже если *M* четно) приводит к ограничениям по μ_p и l_p как $\mu_1+\ldots+\mu_{N-1}+l\le q$ или $l_N+\sum_{p=1}^{N-1}\left(l_p+2\mu_p\right)\le 2q$.

Отметим, что значение $\max\left(r_1,\ldots,r_N\right)=r_N$ условно в наших обозначениях, так как из условия коммутативности левого выражения в (2.1) мы всегда можем выбрать такой индекс N, путем перестановки или переобозначении. Для краткости обозначений сумм здесь и везде будем полагать, что

$$\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k=0}^{\infty}=\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_k=0}^{\infty}.$$

Для получения выражения (2.1) и (2.2) будем исходить из производящей функции для полиномов Гегенбауэра, в котором в нашем случае запишем как

$$\left|\mathbf{R}_{N-1}+\mathbf{x}_N\right|^{-2\rho}=\frac{\left(r_N\right)^{-2\rho}}{\left(1+2\frac{R_{N-1}}{r_N}\left(\zeta^{(R)}\zeta^{(N)}\right)+\left(\frac{R_{N-1}}{r_N}\right)^2\right)}$$

$$=\left(r_N\right)^{-2\rho}\sum_{l=0}^{\infty}\left(-\frac{R_{N-1}}{r_N}\right)^l C_l^{\rho}\left(\left(\zeta^{(R)}\zeta^{(N)}\right)\right)= \qquad (2.3)$$

$$=\left(r_N\right)^{-2\rho}\sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R_{N-1}}{r_N}\right)^{2l+\sigma}\left(-1\right)^{\sigma}C_{2l+\sigma}^{\rho}\left(\left(\zeta^{(R)}\zeta^{(N)}\right)\right),$$

где $\mathbf{x}_N=r_N\zeta^{(N)}$, $\mathbf{R}_{N-1}=R_{N-1}\zeta^{(N-1)}$, $\rho\in\mathbb{R}$. Отметим, что в (2.3) $\frac{R_{N-1}}{r_N}<1$, а в последнем выражении мы разложили сумму по четным ($\sigma=0$) и нечетным ($\sigma=1$) суммам.

Для начала покажем, что для полиномов Гегенбауэра справедливо выражение вида

$$C_{2l+\sigma}^{\rho}\left(\left(\zeta^{(1)}\zeta^{(2)}\right)\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{l}\frac{\left(-1\right)^{m+l}\Gamma\left(\rho+2l+\sigma+1\right)\Gamma\left(\rho+l+m+\sigma\right)\Gamma\left(\frac{M}{2}+l+m+\sigma\right)}{\left(l-m\right)!\,\Gamma\left(\rho\right)\Gamma\left(\rho+l+m+\sigma+1\right)\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)}\times \qquad (2.4)$$

$$\times\int\frac{d\Omega_\zeta}{S_M}\frac{\left(2\left(\zeta^{(1)}\zeta\right)\right)^{2l+\sigma}}{\left(2l+\sigma\right)!}\frac{\left(2\left(\zeta^{(2)}\zeta\right)\right)^{2m+\sigma}}{\left(2m+\sigma\right)!}.$$

Действительно, представим функцию Гегенбауэра в виде [5, гл. 3, п. 3.15.1]

$$C_{2l+\sigma}^{\rho}\left(z\right)=$$

$$=\frac{\left(-1\right)^l\Gamma\left(\rho+l+\sigma\right)}{\Gamma\left(l+1\right)\Gamma\left(\rho\right)}\left(2z\right)^{\sigma}{}_2F_1\left[\begin{matrix}-l & \rho+l+\sigma\\ & \frac{1}{2}+\sigma\end{matrix}\middle| z^2\right]= \qquad (2.5)$$

$$=\sum_{k=0}^{l}\frac{\left(-1\right)^{l+k}\Gamma\left(\rho+l+\sigma+k\right)}{\Gamma\left(l-k+1\right)\Gamma\left(\rho\right)}\frac{\left(2z\right)^{2k+\sigma}}{\left(2k+\sigma\right)!},$$

$$l=0,1,2,\ldots,\quad \sigma=0,1$$

из выражения [6, гл. 5, п. 5.3.1(9)] для конечных сумм от обобщенных гипергеометрических функции

$$\sum_{m=0}^{l}\frac{\left(-1\right)^m l!}{m!\left(l-m\right)!}\frac{\left(\alpha\right)_m}{\left(\beta\right)_m}{}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-m & \left(a_p\right)\\ & \left(b_q\right)\end{matrix}\middle| x\right]=$$

$$=\frac{\left(\beta-\alpha\right)_l}{\left(\beta\right)_l}{}_{p+2}F_{q+1}\left[\begin{matrix}-l & \alpha & \left(a_p\right)\\ \alpha-\beta-l+1 & & \left(b_q\right)\end{matrix}\middle| x\right]$$

при $p=q=1$, $a_1=-l$, $b_1=\frac{1}{2}+\sigma$, $\alpha=\rho+l+\sigma$, $\beta=\alpha+1$, представим (2.5) как

$$C^{\rho}_{2l+\sigma}(z)=\frac{\Gamma(\rho+2l+\sigma+1)}{\Gamma(\rho)}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{l}\frac{(-1)^{m+l}}{(l-m)!\,l!\,m!}\frac{\Gamma(\rho+l+m+\sigma)}{\Gamma(\rho+l+m+\sigma+1)}(2z)^{\sigma}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-m,-l\\ \frac{1}{2}+\sigma\end{matrix}\middle|z^2\right]. \tag{2.6}$$

С другой стороны, покажем, что для M-мерных единичных векторов $\zeta^{(1)}$ и $\zeta^{(2)}$

$$\int\frac{d\Omega_\zeta}{S_M}\frac{\left(2(\zeta^{(1)}\zeta)\right)^{2l+\sigma}}{(2l+\sigma)!}\frac{\left(2(\zeta^{(2)}\zeta)\right)^{2m+\sigma}}{(2m+\sigma)!}=$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{M}{2}+l+m+\sigma\right)}\frac{\left(2(\zeta^{(1)}\zeta^{(2)})\right)^{\sigma}}{l!\,m!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-l,-m\\ \frac{1}{2}+\sigma\end{matrix}\middle|(\zeta^{(1)}\zeta^{(2)})^2\right]. \tag{2.7}$$

Действительно, используя выражение из [6, гл. 5, п. 5.3.2(2)]

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}\frac{(2k+\upsilon)(\upsilon)_k}{(n+\upsilon+1)_k}\,{}_{p+2}F_q\left[\begin{matrix}-k,\upsilon+k,(a_p)\\ (b_q)\end{matrix}\middle|x\right]=$$

$$=(\upsilon)_{n+1}\frac{\prod_p(a_p)_n}{\prod_q(b_q)_n}x^n,$$

при $p=0$, $q=1$, $b_1=\frac{1}{2}+\sigma$, $\upsilon=\frac{M}{2}+\sigma-1$ и используя представление гипергеометрической функции через полиномы Гегенбауэра из (2.5) получим, что

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(2k+\sigma+\frac{M}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{M}{2}-1\right)}{(n-k)!\,\Gamma\left(\frac{M}{2}+n+k+\sigma\right)}C^{\frac{M}{2}-1}_{2k+\sigma}(z)=\frac{(2z)^{2n+\sigma}}{(2n+\sigma)!} \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=0}^{n-2k\geq 0}\frac{n-2k+\frac{M}{2}-1}{\frac{M}{2}-1}\frac{C^{\frac{M}{2}-1}_{n-2k}(z)}{\left(\frac{M}{2}\right)_{n-k}k!}=\frac{(2z)^n}{n!}.$$

Таким образом, представляя левую часть выражения в (2.7) при $z=(\zeta^{(1)}\zeta)$ и $z=(\zeta^{(2)}\zeta)$, запишем ее как

$$\int\frac{d\Omega_\zeta}{S_M}\frac{\left(2(\zeta^{(1)}\zeta)\right)^{2l+\sigma}}{(2l+\sigma)!}\frac{\left(2(\zeta^{(2)}\zeta)\right)^{2m+\sigma}}{(2m+\sigma)!}=$$

$$=\sum_{k_1=0}^{l}\sum_{k_2=0}^{m}\frac{\left(2k_1+\sigma+\frac{M}{2}-1\right)\left(2k_2+\sigma+\frac{M}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{M}{2}-1\right)^2}{(l-k_1)!(m-k_2)!\,\Gamma\left(\frac{M}{2}+l+k_1+\sigma\right)\Gamma\left(\frac{M}{2}+m+k_2+\sigma\right)}\times$$

$$\times\int\frac{d\Omega_\zeta}{S_M}C^{\frac{M}{2}-1}_{2k_1+\sigma}\left((\zeta^{(1)}\zeta)\right)C^{\frac{M}{2}-1}_{2k_2+\sigma}\left((\zeta^{(2)}\zeta)\right).$$

Используя теорему о свертке для сферических гармоник [4, гл. 11], в котором

$$\int\frac{d\Omega_\zeta}{S_M}C^{\frac{M}{2}-1}_{2k_1+\sigma}\left((\zeta^{(1)}\zeta)\right)C^{\frac{M}{2}-1}_{2k_2+\sigma}\left((\zeta^{(2)}\zeta)\right)=$$

$$=\delta_{k_1,k_2}\frac{\frac{M}{2}-1}{2k_1+\sigma+\frac{M}{2}-1}C^{\frac{M}{2}-1}_{2k_1+\sigma}\left((\zeta^{(1)}\zeta^{(2)})\right),$$

представим правую часть предыдущего выражения как

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{\left(2k_1+\sigma+\frac{M}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{M}{2}-1\right)^2\left(\frac{M}{2}-1\right)C^{\frac{M}{2}-1}_{2k_1+\sigma}\left((\zeta^{(1)}\zeta^{(2)})\right)}{\Gamma(l-k_1+1)\Gamma(m-k_1+1)\Gamma\left(\frac{M}{2}+l+k_1+\sigma\right)\Gamma\left(\frac{M}{2}+m+k_1+\sigma\right)},$$

выражая в этом выражении функцию Гегенбауэра в виде ряда (2.5) (при $\rho\to\frac{M}{2}-1$) представим это выражение в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k_1+n}\left(2k_1+\sigma+\frac{M}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)}{\Gamma(l-k_1+1)\Gamma(m-k_1+1)\Gamma(k_1-n+1)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{M}{2}-1+k_1+n+\sigma\right)}{\Gamma\left(\frac{M}{2}+l+k_1+\sigma\right)\Gamma\left(\frac{M}{2}+m+k_1+\sigma\right)}\frac{\left(2(\zeta^{(1)}\zeta^{(2)})\right)^{2n+\sigma}}{(2n+\sigma)!}$$

после суммирования по k_1 с учетом того, что n принимает целые положительные числа, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)\Gamma(a+1)}{\Gamma(l+1-n)\Gamma(m+1-n)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}\times$$

$$\times\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,\frac{a}{2}+1,b,c\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c\end{matrix}\middle|-1\right]\frac{\left(2(\zeta^{(1)}\zeta^{(2)})\right)^{2n+\sigma}}{(2n+\sigma)!}$$

$$a=-1+2n+\sigma+\frac{M}{2},\quad b=n-m,\quad c=n-l,$$

из [6, гл. 7, п. 7.5.4(2)], используя выражение для гипергеометрического ряда ${}_4F_3[\ldots|-1]$

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}a,\frac{a}{2}+1,b,c\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c\end{matrix}\middle|-1\right]=\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)},$$

$$a-2b-2c>-1$$

окончательно получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)\left(2(\zeta^{(1)}\zeta^{(2)})\right)^{2n+\sigma}}{\Gamma(l-n+1)\Gamma(m-n+1)\Gamma\left(\frac{M}{2}+l+m+\sigma\right)(2n+\sigma)!}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{M}{2}+l+m+\sigma\right)}\frac{\left(2(\zeta^{(1)}\zeta^{(2)})\right)^{\sigma}}{l!\,m!}{}_2F_1\left[\left.\begin{matrix}-l,-m\\ \frac{1}{2}+\sigma\end{matrix}\right|(\zeta^{(1)}\zeta^{(2)})^2\right],$$

$$\frac{M}{2}+2l+2m-2n+\sigma>0,$$

что и доказывает выражение (2.7). Так как в последнем выражении верхний предел суммирования по n является минимальным значением по m и l, то всегда $l\geq n\geq 0$, $m\geq n\geq 0$, и, следовательно, справедливо всегда при всех l,m,σ,M. Объединяя (2.6) при $z=(\zeta^{(1)}\zeta^{(2)})$ и (2.7), получим (2.4).

Используя (2.4), представим (2.3) как

$$\left|\mathbf{R}_{N-1}+\mathbf{x}_N\right|^{-2\rho}=$$

$$=\frac{1}{(r_N)^{2\rho}}\int\frac{d\Omega_\zeta}{S_M}\sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\rho+2l+\sigma+1)}{(2l+\sigma)!\Gamma(\rho)}\left(2\frac{R_{N-1}}{r_N}(\zeta^{(R)}\zeta)\right)^{2l+\sigma}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{l}\frac{(-1)^{l+m+\sigma}}{(l-m)!}\frac{\Gamma(\rho+l+m+\sigma)\Gamma\left(\frac{M}{2}+l+m+\sigma\right)}{\Gamma(\rho+l+m+\sigma+1)\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)}\frac{\left(2(\zeta^{(N)}\zeta)\right)^{2m+\sigma}}{(2m+\sigma)!}.$$

Объединяя четные ($\sigma=0$) и нечетные ($\sigma=1$) суммы по $n=2l+\sigma=0,1,2,\dots$ и суммируя по m с одинаковой четности к n как $m\to n-2m$, получим общий вид

$$\left|\mathbf{R}_{N-1}+\mathbf{x}_N\right|^{-2\rho}=$$

$$=\frac{1}{(r_N)^{2\rho}}\int\frac{d\Omega_\zeta}{S_M}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-2m\geq 0}\frac{\Gamma(\rho+n+1)}{\Gamma(\rho)\,n!}\left(2\frac{R_{N-1}}{r_N}(\zeta^{(R)}\zeta)\right)^{n}\times \quad (2.9)$$

$$\times\frac{(-1)^{n+m}}{m!}\frac{\Gamma(\rho+n-m)\Gamma\left(\frac{M}{2}+n-m\right)}{\Gamma(\rho+n-m+1)\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)}\frac{\left(2(\zeta^{(N)}\zeta)\right)^{n-2m}}{(n-2m)!}.$$

В этом выражении выразим $\mathbf{R}_{N-1}=$ $=R_{N-1}\zeta^{(R)}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{x}_{N-1}=\sum_{i=1}^{N-1}r_i\zeta^{(i)}$ и представим $2\frac{R_{N-1}}{r_N}(\zeta^{(R)}\zeta)=\sum_{i=1}^{N-1}2\frac{r_i}{r_N}(\zeta^{(i)}\zeta)=\sum_{i=1}^{N-1}z_i$. Используя соотношение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_p\Gamma(a_p+n)}{\prod_q\Gamma(b_q+n)}\frac{\alpha^n}{n!}\left(\sum_{i=1}^{N-1}z_i\right)^n=$$

$$=\sum_{n_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{n_{N-1}}^{\infty}\alpha^{n_1+\ldots+n_{N-1}}\frac{\prod_p\Gamma(a_p+n_1+\ldots+n_{N-1})}{\prod_q\Gamma(b_q+n_1+\ldots+n_{N-1})}\prod_{i=1}^{N-1}\frac{(z_i)^{n_i}}{n_i!},$$

где для сокращения записи введем

$$\tilde{n}=n_1+\ldots+n_{N-1}=\sum_{i=1}^{N-1}n_i$$

$$\sum_{\tilde{n}}(\ldots)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{n_{N-1}}^{\infty}(\ldots).$$

Тогда (2.9) преобразуем к следующему виду:

$$(r_N)^{2\rho}\left|(\mathbf{x}_1+\ldots+\mathbf{x}_{N-1})+\mathbf{x}_N\right|^{-2\rho}=$$

$$\int\frac{d\Omega_\zeta}{S_M}\sum_{\tilde{n}}\prod_{i=1}^{N-1}\left[\left(\frac{r_i}{r_N}\right)^{n_i}\frac{\left(2(\zeta^{(i)}\zeta)\right)^{n_i}}{n_i!}\right]\frac{(-1)^{\tilde{n}}\,\Gamma(\rho+\tilde{n}+1)}{\Gamma(\rho)}\times \quad (2.10)$$

$$\times\sum_{m=0}^{\tilde{n}-2m\geq 0}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{\Gamma(\rho+\tilde{n}-m)\Gamma\left(\frac{M}{2}+\tilde{n}-m\right)}{\Gamma(\rho+\tilde{n}-m+1)\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)}\frac{\left(2(\zeta^{(N)}\zeta)\right)^{\tilde{n}-2m}}{(\tilde{n}-2m)!}.$$

Рассмотрим отдельную сумму по m. Так, используя второе выражение в (2.8) при $z=(\zeta^{(N)}\zeta)$, представим его как

$$\sum_{\mu_N}^{\tilde{n}-2\mu_N\geq 0}\sum_{k=0}^{\mu_N}\frac{(-1)^{k+\mu_N}}{(\mu_N-k)!\,k!}\frac{\Gamma(\rho+\tilde{n}-\mu_N+k)\Gamma\left(\frac{M}{2}+\tilde{n}-\mu_N+k\right)}{\Gamma(\rho+\tilde{n}-\mu_N+k+1)\Gamma\left(\frac{M}{2}+\tilde{n}-2\mu_N+k\right)}\times$$

$$\times\frac{\left(\tilde{n}-2\mu_N+\frac{M}{2}-1\right)}{\left(\frac{M}{2}-1\right)}C_{\tilde{n}-2\mu_N}^{\frac{M}{2}-1}\left((\zeta^{(N)}\zeta)\right)$$

и снимая сумму по k, получим

$$\sum_{\mu_N}^{\tilde{n}-2\mu_N\geq 0}\frac{(-1)^{\mu_N}}{\mu_N!}{}_3F_2\left[\left.\begin{matrix}-\mu_N,\rho+\tilde{n}-\mu_N,\frac{M}{2}+\tilde{n}-\mu_N\\ \rho+\tilde{n}-\mu_N+1,\frac{M}{2}+\tilde{n}-2\mu_N\end{matrix}\right|1\right]\times$$

$$\times\frac{\Gamma(\rho+\tilde{n}-\mu_N)\Gamma\left(\frac{M}{2}+\tilde{n}-\mu_N\right)\left(\tilde{n}-2\mu_N+\frac{M}{2}-1\right)}{\Gamma(\rho+\tilde{n}-\mu_N+1)\Gamma\left(\frac{M}{2}+\tilde{n}-2\mu_N\right)\left(\frac{M}{2}-1\right)}C_{\tilde{n}-2\mu_N}^{\frac{M}{2}-1}\left((\zeta^{(N)}\zeta)\right),$$

здесь гипергеометрический ряд ${}_3F_2\left[\ldots|1\right]$ является рядом Заальшютса [5, гл. 4, п. 4.4(3)]

$$
{}_3F_2\left[\left.\begin{matrix} -\mu_N & \rho+\tilde{n}-\mu_N & \frac{M}{2}+\tilde{n}-\mu_N \\ \rho+\tilde{n}-\mu_N+1 & \frac{M}{2}+\tilde{n}-2\mu_N & \end{matrix}\right|1\right]=
$$

$$
=\frac{\mu_N!\left(\rho+1-\frac{M}{2}\right)_{\mu_N}}{\left(\rho+1+\tilde{n}-\mu_N\right)_{\mu_N}\left(-\tilde{n}+\mu_N+1-\frac{M}{2}\right)_{\mu_N}}
$$

и таким образом сумму по m в (2.10) можно преобразовать к виду

$$
\sum_{\mu_N}^{\tilde{n}-2\mu_N\ge 0}\frac{\Gamma\left(\rho+\tilde{n}-\mu_N\right)\Gamma\left(\rho-\frac{M}{2}+1+\mu_N\right)}{\Gamma\left(\rho+\tilde{n}+1\right)\Gamma\left(\rho-\frac{M}{2}+1\right)}\times
$$

$$
\times\frac{\left(\tilde{n}-2\mu_N+\frac{M}{2}-1\right)}{\left(\frac{M}{2}-1\right)}C_{\tilde{n}-2\mu_N}^{\frac{M}{2}-1}\left((\zeta^{(N)}\zeta)\right).
$$

Выражая в (2.10) $\frac{\left(2(\zeta^{(i)}\zeta)\right)^{n_i}}{n_i!}$ из второго выражения (2.8) при $z=(\zeta^{(i)}\zeta)$ и объединяя с последним выражением (сумма по m в (2.10)), получим

$$
\left|\mathbf{x}_1+\ldots+\mathbf{x}_{N-1}+\mathbf{x}_N\right|^{-2\rho}=
$$

$$
=\frac{1}{\left(r_N\right)^{2\rho}}\int\frac{d\Omega_\zeta}{S_M}\sum_{\tilde{n}}\left(-1\right)^{\tilde{n}}\left(\rho\right)_{\tilde{n}-\mu_N}\left(\rho-\frac{M}{2}+1\right)_{\mu_N}\times
$$

$$
\times\sum_{\mu_1=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}\ldots\sum_{\mu_{N-1}=0}^{\left[\frac{n_{N-1}}{2}\right]}\sum_{\mu_N=0}^{\left[\frac{\tilde{n}}{2}\right]}\frac{\tilde{n}-2\mu_N+\frac{M}{2}-1}{\frac{M}{2}-1}C_{\tilde{n}-2\mu_N}^{\frac{M}{2}-1}\left((\zeta^{(N)}\zeta)\right)\times
$$

$$
\times\prod_{i=1}^{N-1}\left(\left(\frac{r_i}{r_N}\right)^{n_i}\frac{n_i-2\mu_i+\frac{M}{2}-1}{\frac{M}{2}-1}\frac{C_{n_i-2\mu_i}^{\frac{M}{2}-1}\left((\zeta^{(i)}\zeta)\right)}{\left(\frac{M}{2}\right)_{n_i-\mu_i}\mu_i!}\right)
$$

Или, вводя $n_i-2\mu_i=l_i$, $i=1,\ldots,N-1$ и $\tilde{n}-2\mu_N=l_N$, а также $l=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}l_i$, $\rho=\frac{\nu}{2}$, преобразуем суммы в последнем выражении и запишем в более простом виде как в (2.1)

$$
\frac{\left(r_N\right)^{\nu}}{\left|\mathbf{x}_1+\ldots+\mathbf{x}_N\right|^{\nu}}=
$$

$$
=\sum_{\substack{l_1=0\\ \ldots\\ l_N=0}}^{\infty}\ \sum_{\substack{\mu_1=0\\ \ldots\\ \mu_{N-1}=0}}^{\infty}\frac{(-1)^{l_N}\left(\frac{\nu}{2}\right)_{\mu_1+\ldots+\mu_{N-1}+l}\left(\frac{\nu-M+2}{2}\right)_{\mu_1+\ldots+\mu_{N-1}+l-l_N}}{\prod_{i=1}^{N-1}\left[\left(\frac{M}{2}\right)_{l_i+\mu_i}\mu_i!\right]}\times
$$

$$
\times\prod_{i=1}^{N-1}\left(\frac{r_i}{r_N}\right)^{l_i+2\mu_i}\int\frac{d\Omega_\zeta}{S_M}\prod_{p=1}^{N}\frac{l_p+\frac{M}{2}-1}{\frac{M}{2}-1}C_{l_p}^{\frac{M}{2}-1}\left((\zeta^{(p)}\zeta)\right).
$$

Используя теорему сложения для M-мерных ультрасферических функции [4, гл. 11, п. 11.4]

$$
\frac{\left(l_p+\frac{M}{2}-1\right)}{\frac{M}{2}-1}C_{l_p}^{\frac{M}{2}-1}\left((\zeta^{(p)}\zeta)\right)=S_M\sum_{\mathbf{m_k}}Y_{l_i,\mathbf{m_k}}\left(\zeta^{(p)}\right)Y_{l_i,\mathbf{m_k}}\left(\zeta\right)^*,
$$

получим коэффициентную угловую функцию вида (2.2)

Выражение (2.1) можно также представить через функцию Лауричеля многих переменных как

$$
\frac{1}{\left|\mathbf{x}_1+\ldots+\mathbf{x}_N\right|^{\nu}}=
=\sum_{l_1,\ldots,l_N=0}^{\infty}V_{l_1,\ldots,l_N}\left(\zeta^{(1)},\ldots,\zeta^{(N)}\right)R_{l_1,\ldots,l_N}^{(\nu,M)}\left(r_1,\ldots,r_N\right), \tag{2.11}
$$

где

$$
R_{l_1,\ldots,l_N}^{(\nu,M)}\left(r_1,\ldots,r_N\right)=
$$

$$
=\frac{(-1)^{l_N}}{\left(r_N\right)^{\nu}}\frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)_l\left(\frac{\nu-M+2}{2}\right)_{l-l_N}}{\prod_{p=1}^{N-1}\left(\frac{M}{2}\right)_{l_p}}\prod_{p=1}^{N-1}\left(\frac{r_p}{r_N}\right)^{l_p}\times \tag{2.12}
$$

$$
\times F_C^{(N-1)}\left[\left.\begin{matrix}\frac{\nu}{2}+l, \frac{\nu-M+2}{2}+l-l_N \\ l_1+\frac{M}{2},\ldots,l_{N-1}+\frac{M}{2}\end{matrix}\right|\left(\frac{r_1}{r_N}\right)^2,\ldots,\left(\frac{r_{N-1}}{r_N}\right)^2\right].
$$

Сходимость этого ряда и ряда (2.1) такая же, как и в (2.3), выполняется при условии $\sum_{i=1}^{N-1}\frac{r_i}{r_N}<1$. Действительно, из (2.3) сходимость выполняется при условии, что $\frac{\left|\mathbf{R}_{N-1}\right|}{r_N}<1$ при

$$
\max\left|\mathbf{R}_{N-1}\right|=\sum_{p=1}^{N-1}r_p\ .
$$

Литература

1. Ахметьянов Р.Ф., Шиховцева Е.С. Разложение степенного потенциала на основе обобщенной формулы Гейне // Известия Уфимского научного центра РАН. 2016. № 1. С. 24–31.
2. Джибути Р.И., Крупенникова Н.Б. Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Мецниереба, Тбилиси, 1984.
3. Шмидт Э., Цигельман Х. Проблема трех тел в квантовой механике. М.: Наука, 1979.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. Т. 2. М.: Наука, 1974.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. Т. 1. М.: Наука, 1965.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. Дополнительные главы. Т. 3. М.: Физматлит, 2003.

References

1. Akhmetyanov R.F., Shikhovtseva E.S. Expansion of power potential on the basis of generalized Heine formula. Izvestiya Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN, 2016, no. 1, pp. 24–31.
2. Djibouti R.I., Krupennikova N.B. The method of hyperspheric functions in quantum mechanics of several bodies. Metsniereba, Tbilisi, 1984.
3. Schmidt E., Ziegelman H. The problem of three bodies in quantum mechanics, Nauka, M., 1979.
4. Bateman H., Erdélyi A. Higher transcendental functions, vol. 2. McGraw-Hill, New-York (1953).
5. Bateman H., Erdélyi A. Higher transcendental functions., vol. 1. McGraw-Hill, New-York (1953)
6. Prudnikov A.P., Brychkov Y.A., Marichev O.I. Integrals and Series. Special functions. Supplementary Chapters., vol. 3, Moscow Nauka, 2003 (Russia)

REPRESENTATION OF THE PAIRED INTERACTION POTENTIAL IN THE FORM OF MULTIDIMENSIONAL RATIONAL SERIES IN JACOBI VARIABLES FOR MANY-BODY PROBLEMS

© **R.F. Akhmetyanov, E.S. Shikhovtseva**

Institute of Molecule and Crystal Physics, Ufa Scientific Centre, RAS,
151, prospect Oktyabrya Ufa 450075, Russian Federation

Scalar power functions of the form $\left|\mathbf{x}_1+\ldots+\mathbf{x}_N\right|^{-\nu}\in\mathbb{R}$ are in some cases found in physical problems and applications, especially in many-body problems with paired interactions. There are known decompositions for two vectors in three-dimensional space. In this paper, we consider analogous decompositions with any number of N arbitrary M-dimensional vectors in Euclidean space as a product of a multidimensional rational series with respect to spatial variables and hyperspheric functions on the unit sphere S^{M-1}. Such an advantage of expansion arises in three-body problems when solving the Faddeev equation, where it is known that the main problem is the approximate choice of approximation of interaction potentials, in which the t-matrix scattering elements acquired a separable form.

Key words: generalized hypergeometric function, hyperspheric function, Gegenbauer function.