УДК 51-7
DOI: 10.31040/2222-8349-2018-0-2-5-9

ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТИВНОСТИ И РИСКА

© И.И. Голичев, Н.И. Лучникова

На основе градиентных методов минимизации функций разработаны численные методы решения задачи оптимизации распределения ресурсов с учетом эффективности и риска. Основой разработки программ в условиях неопределенности являются этапы разработки планов программно-целевого метода – этапы оптимизации. Оптимизация всегда подразумевает использование моделей. Наиболее распространенным методом оптимизации является градиентный метод. Среди множества градиентных методов выбран метод условного градиента как эффективный и довольно простой. Каждый шаг метода условного градиента описан простыми формулами, указан признак остановки процесса.

Ключевые слова: эффективность, риск, оптимальное управление, градиент.

1. Введение и постановка задачи.

Задача оптимизации решения с учетом двух и более критериев возникает во многих областях экономики финансов и производства. В экономических и финансовых задачах чаще всего возникают задачи оптимизации по критериям эффективности и риска принимаемого решения.

Такого рода задачи рассматриваются, например, в работах [1–6, 9].

В данной работе под ресурсами будем понимать финансовые ресурсы.

Решается задача об оптимальной величине x_i вложения ресурсов в i-ю операцию из заданной совокупности операций O_i, i=1, … , m с учетом ожидаемой эффективности и риска. При этом эффективность операции O_i (i=1, … , m) является случайной величиной; под ожидаемой эффективностью будем понимать ее математическое ожидание.

Решение поставленной задачи, как правило, связано с условиями на управляемые параметры x_i (i=1, … , m). В большинстве случаев эти условия задаются линейными ограничениями вида:

$$\sum_{j=1}^{m} {}_{ij}x_j \le b_j(i = 1, \dots, s),$$

$$\sum_{j=1}^{m} {}_{ij}x_j = b_j(i = s + 1, \dots, m) \qquad (1)$$

Обозначим через U множество точек из E_m удовлетворяющих условию (1).

Рассмотрим случай, когда эффективность и риск отдельных операций пропорциональны вложенным средствам.

Обозначим через d_i математическое ожидание эффективности, а через r_i – риск i-й операции, рассчитанных на единицу вложенных ресурсов.

Пусть $\boldsymbol{x}=(x_1, \dots, x_m)$ – принятое решение, т.е. в i-ю операцию вложено x_i ресурсов, а $Y(\boldsymbol{x})$ – случайная величина эффективности принятого решения $\boldsymbol{x}$. Под ожидаемой эффективностью решения $\boldsymbol{x}$ будем понимать $d(\boldsymbol{x})$ – математическое ожидание случайной величины $Y(\boldsymbol{x})$, а под риском $S(\boldsymbol{x})$ – стандартное отклонение $Y(\boldsymbol{x})$.

Используя известные формулы для определения матожидания и стандартного отклонения суммы случайных величин, получаем следующие формулы:

$$d(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} x_i d_i,$$

$$S(\boldsymbol{x}) = \sqrt{D(\boldsymbol{x})},$$

где $D(\boldsymbol{x})$ – дисперсия $Y(\boldsymbol{x})$

$$D(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i x_j r_i r_j k_{ij}, \qquad (2)$$

k_{ij} – коэффициент корреляции между i-й и j-й операциями.

ГОЛИЧЕВ Иосиф Иосифович – д.ф.-м.н., Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, e-mail: mullabaeva.87@mail.ru
ЛУЧНИКОВА Наталья Иосифовна, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Уфимский филиал, e-mail: luchnikova_ni_77@mail.ru

Обозначим через V матрицу ковариаций $V = (r_i r_j k_{ij})_{i,j=1}^{m}$,
тогда

$$S(\boldsymbol{x}) = (V\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в E_m.

В данной работе в основном рассматривается случай, когда матрица V невырожденная.

В большинстве работ по оптимизации распределения ресурсов задача сводилась к оптимизации матожидания результата, то есть оптимизации величины $d(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} d(x_i)$. Чтобы учесть влияние стандартного отклонения, поставим задачу оптимизации функционала

$$J_p(\boldsymbol{x}) = d(\boldsymbol{x}) + t_p S(\boldsymbol{x}) \to \max_{\boldsymbol{x}\in U,} \quad (4)$$

где t_p – положительный параметр, который можно варьировать.

К решению задачи (4) сводится, например, задача оптимизации по *VaR*-критерию. Оптимизация по *VaR*-критерию состоит в следующем. Эффективность решения рассматривается как случайная величина $Y(\boldsymbol{x})$, задается некоторое число $p \in (0,1)$, и ставится задача.

Найти решение $\boldsymbol{x}=(x_1, \dots, x_m)$, при котором максимальна величина $Y_p(\boldsymbol{x})$, определяемая из условия

$$P\big(Y(\boldsymbol{x}) \geq Y_p(\boldsymbol{x})\big) = p.$$

Другими словами, требуется найти решение $\boldsymbol{x}$, при котором максимальна нижняя граница ожидаемых значений $Y(\boldsymbol{x})$, гарантированная с вероятностью p.

Предположим, что остаточная компонента $Y(\boldsymbol{x}) - d(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет нормальному закону распределения, тогда нетрудно показать, что

$$Y_p(\boldsymbol{x}) = d(\boldsymbol{x}) + t_p S(\boldsymbol{x}),$$

где t_p определяется из условия $\Phi(t_p)=1-p$. Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

Задачу максимизации величины $Y_p(\boldsymbol{x})$ заменим задачей минимизации функционала

$$-J_p(\boldsymbol{x}) = -d(\boldsymbol{x}) - t_p S(\boldsymbol{x}) \to \min_{\boldsymbol{x}\in U}. \quad (5)$$

В разделах 2, 4 рассматривается случай невырожденной матрицы ковариаций. Для решения задачи (5) обосновано применение метода условного градиента и разработаны алгоритмы метода при различных способах задания ограничений на параметры x_i.

2. Приближенное решение задачи (5) при невырожденной матрице ковариаций.

Для решения задачи (5) используем метод условного градиента. Этот метод применяется в основном для решения задач минимизации и заключается в построении последовательности по следующему правилу: по известному k-му приближению находим вспомогательное приближение $\overline{\boldsymbol{x}^k} \in \widehat{U}$ из условия

$$\overline{\boldsymbol{x}^k} \in U,$$

$$\left(-J_p'(\boldsymbol{x}^k), \overline{\boldsymbol{x}^k}\right) = \inf_{\boldsymbol{x}\in\widehat{U}} \left(-J_p'(\boldsymbol{x}^k), \boldsymbol{x}\right), \quad (6)$$

где $-J_p'(\boldsymbol{x}^k)$ – градиент функционала $-J_p(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}^k$, и затем полагаем

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \alpha_k\left(\overline{\boldsymbol{x}^k} - \boldsymbol{x}^k\right),\ 0 \leq \alpha_k \leq 1, \quad (7)$$

где α_k выбирается из условий

$$0 \leq \alpha_k \leq 1, k = 0, 1, \dots, \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty, \quad (8)$$

например, $\alpha_k = (1+k)^{-1}$.

Отметим, что нахождение точки $\overline{\boldsymbol{x}^k}$ в рассматриваемой задаче сводится к решению задачи линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^k x_i \to inf,\ \ \boldsymbol{x} \in U,$$

где y_i^k – i-я координата градиента $J_p'(\boldsymbol{x})$ функционала $J_p(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}^k$, а $-J_p'(\boldsymbol{x})$ определяется по формуле:

$$-J_p'(\boldsymbol{x}) = -d - \frac{t_p V(x)}{S(x)},$$

здесь $\boldsymbol{d}$ – вектор $\boldsymbol{d}=(d_1, \dots, d_m)$, который является градиентом функционала $d(\boldsymbol{x})$. Используя формулу (3), нетрудно показать, что $S'(\boldsymbol{x}) = \frac{V(\boldsymbol{x})}{S(\boldsymbol{x})}$.

Будем предполагать, что выполнено естественное ограничение

$$0 < \alpha \leq \sum_{i=1}^{m} x_i \leq M,\ \ x_i \geq 0, \quad (9)$$

где α и M – положительные постоянные. Обозначим через $\widetilde{U}$ множество точек $\boldsymbol{x} \in E_m$, удовлетворяющих условию (9), $\widehat{U} = U \cap \widetilde{U}$ и через U_{p^*} – множество точек минимума функционала $-J_p(\boldsymbol{x})$ на $\widehat{U}$.

Теорема 1. Пусть матрица ковариаций V невырождена на $\widehat{U}$, тогда при любом выборе начального приближения $\boldsymbol{x}^0 \in \widehat{U}$ последовательность $\{\boldsymbol{x}^k\}$, определенная условиями (6)–(8), сходится к $\widehat{U}_{p^*}$.

Доказательство сходимости метода условного градиента для функций $f(u)$ из класса $C''(U)$ содержатся в работах [6, 7], например, в теоремах 1, 3 гл. 5 §4 работы [6]. $f(u) \subset C''(U)$, если функция $f(u)$ выпуклая и ее производная удовлетворяет условию Липшица. Выполнение условий принадлежности функционала $J_p(\boldsymbol{x})$ классу $C''(\widehat{U})$ будет доказано в следующих двух леммах.

3. Доказательство лемм 1 и 2.

Лемма 1. Функционал $J_p(\boldsymbol{x})$ выпуклый на $\widehat{U}$.

Для доказательства леммы достаточно убедиться, что функционал $S(\boldsymbol{x})$ является выпуклым. Заметим, что матрица V неотрицательно определенная, поскольку согласно формуле (2), $(V\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=D(\boldsymbol{x})$.

Если матрица V невырожденная, то она является положительно определенной и справедливо неравенство

$$(V\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq \lambda_1 \|\boldsymbol{x}\|^2, \ \forall \boldsymbol{x} \in \widehat{U}, \qquad (10)$$

где $\lambda_1 > 0$ – минимальное собственное значение матрицы V. Введем обозначение $\|\boldsymbol{x}\|_V$ с учетом формулы (3)

$$\|\boldsymbol{x}\|_V = (V\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} = S(\boldsymbol{x}). \qquad (11)$$

Поскольку V – положительно определенная матрица, то существует такая матрица $V^{\frac{1}{2}}$, что $V^{\frac{1}{2}} \cdot V^{\frac{1}{2}} = V$. Покажем, что $\|\boldsymbol{x}\|_V$ является нормой, если матрица V невырожденная, и полунормой, если V – вырожденная матрица. В обоих случаях справедливо равенство $\|\lambda \boldsymbol{x}\|_V = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\|_V$. Для того чтобы убедиться в справедливости неравенства треугольника, заметим, что

$$\|\boldsymbol{x}\|_V = (V\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} = (V^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}, V^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} = \left\|V^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}\right\|.$$

Откуда следует, что

$$|(V\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| = \left|\left(V^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x},\ V^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{y}\right)\right| \leq \left\|V^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}\right\| \left\|V^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{y}\right\| = \|\boldsymbol{x}\|_V \|\boldsymbol{y}\|_V.$$

Используя последнее неравенство, получаем

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_V^2 = (V(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (V\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + (V\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + 2(V\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|_V^2 + \|\boldsymbol{y}\|_V^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|_V^2 \|\boldsymbol{y}\|_V^2 = (\|\boldsymbol{x}\|_V + \|\boldsymbol{y}\|_V)^2.$$

Теперь, учитывая (11), нетрудно видеть, что

$$S(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) = \|\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}\|_V \leq \alpha\|\boldsymbol{x}\|_V + (1-\alpha)\|\boldsymbol{y}\|_V = \alpha S(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha)S(\boldsymbol{y})$$

При любом $\alpha \in [0,1]$ утверждение леммы сразу следует из определения выпуклой функции, см. §2 гл. 4 работы [6].

Лемма 2. На множестве $\widehat{U}$ градиент функционала $S(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство.

Из неравенства (10) и равенств (11) следует, что $S(\boldsymbol{x}) \geq \sqrt{\lambda_1}\|\boldsymbol{x}\|$. С другой стороны, учитывая равенство (3) получаем, что $|S(\boldsymbol{x})| \leq \left\|V^{\frac{1}{2}}\right\| \|\boldsymbol{x}\|$. Таким образом, справедливы оценки

$$\sqrt{\lambda_1}\|\boldsymbol{x}\| \leq |S(\boldsymbol{x})| \leq \left\|V^{\frac{1}{2}}\right\| \|\boldsymbol{x}\|.$$

Преобразуем разность $S'(\boldsymbol{x}_1) - S'(\boldsymbol{x}_2)$ следующим образом

$$S'(\boldsymbol{x}_1) - S'(\boldsymbol{x}_2) = \frac{V(\boldsymbol{x}_1)}{S(\boldsymbol{x}_1)} - \frac{V(\boldsymbol{x}_2)}{S(\boldsymbol{x}_2)} = (V\boldsymbol{x}_1 S(\boldsymbol{x}_2)) - (V\boldsymbol{x}_2 S(\boldsymbol{x}_1))(S(\boldsymbol{x}_1)S(\boldsymbol{x}_2))^{-1} = (V\boldsymbol{x}_1(S(\boldsymbol{x}_2) - S(\boldsymbol{x}_1)) + (V\boldsymbol{x}_1 - V\boldsymbol{x}_2 S(\boldsymbol{x}_1) S(\boldsymbol{x}_1) S(\boldsymbol{x}_2) - 1. \qquad (12)$$

Далее получим следующие неравенства:

$$\|V\boldsymbol{x}_1 - V\boldsymbol{x}_2\| = \|V(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\| \leq \|V\|\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|; \qquad (13)$$

$$S(\boldsymbol{x}_2) - S(\boldsymbol{x}_1) = \left(S^2(\boldsymbol{x}_2) - S^2(\boldsymbol{x}_1)\right)(S(\boldsymbol{x}_2) + S(\boldsymbol{x}_1))^{-1} = \left((V\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) - (V\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1)\right)(S(\boldsymbol{x}_2) + S(\boldsymbol{x}_1))^{-1}; \qquad (14)$$

$$(V\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) - (V\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = (V\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + (V(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{x}_1) \leq \|V\|\|\boldsymbol{x}_2\|\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\| + \|V\|\|\boldsymbol{x}_1\|\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\| = \|V\|(\|\boldsymbol{x}_2\| + \|\boldsymbol{x}_1\|)(\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\|). \qquad (15)$$

Из неравенств (9) следуют оценки

$$\frac{\alpha}{m} \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq \sqrt{m}M. \qquad (16)$$

Учитывая оценки снизу на $S(\boldsymbol{x})$ и $\|\boldsymbol{x}\|$, получаем неравенство

$$S(\boldsymbol{x}_2) + S(\boldsymbol{x}_1) \geq \frac{2\alpha}{m}\lambda_1^{\frac{1}{2}}. \qquad (17)$$

Последовательно используя неравенства (12)–(17), получим оценку

$$|S(\boldsymbol{x}_2) - S(\boldsymbol{x}_1)| \leq C_1\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\|,$$

где $C_1 = \|V\| 2M\sqrt{m}\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\frac{m}{2\alpha}$.

Принимая во внимание последнее неравенство и неравенства (12), (13), (17), получаем

$$\|S'(\boldsymbol{x}_1) - S'(\boldsymbol{x}_2)\| \leq C_2\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|,$$

где $C_2 = \left(\|V\|C_1 + \|V\|^{3/2}\right)m^{3/2}M\lambda_1^{-1}\alpha^{-2}$.

Таким образом, лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.

Утверждение теоремы следует из теорем 1 и 3 гл. 5, § 4 работы [6]. Для сходимости последовательности $\{\boldsymbol{x}^k\}$, определенной условиями (6)–(8), к множеству точек минимума достаточно, чтобы минимизируемый функционал $J(\boldsymbol{x})$ был выпуклым и градиент удовлетворял условию Липшица. В рассматриваемом случае показано, что функционал $S(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет этим условиям. Выполнение этих условий для функции $d(\boldsymbol{x})$ очевидно.

4. Алгоритм метода условного градиента

Алгоритм метода приведем на примере, когда ограничения на распределение ресурсов задаются соотношениями

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \qquad (18)$$

а α_k выбираются по формуле

$$\alpha_k = (1+k)^{-1}.$$

В этом случае вспомогательное приближение $\overline{\boldsymbol{x}^k}$ находится явно.

Обозначим $\boldsymbol{Y}^k = -J'_p(\boldsymbol{x}^k)$, y_i^k – i-ю координату вектора Y^k. Тогда задача сводится к задаче: найти $\overline{\boldsymbol{x}^k} \in \widehat{U}$ такое, что

$$\left(y_i^k, \overline{\boldsymbol{x}^k}\right) = \inf_{x \in \widehat{U}} \left(y_i^k, \boldsymbol{x}\right).$$

Последняя задача имеет очевидное решение:

$$\overline{x_i^k} = \begin{cases} a_i, \text{если } y_i^k > 0, \\ b_i, \text{если } y_i^k < 0, \\ \frac{a_i + b_i}{2}, \text{если } y_i^k = 0 \end{cases} \qquad (19)$$

Заметим, что при $y_i^k = 0$ в качестве $\overline{x_i^k}$ можно взять любое число на отрезке $[a_i, b_i]$.

Пусть ограничения на множество возможных решений $\boldsymbol{x}$ определяются неравенствами (18), тогда решение задачи (5) осуществляется по следующим этапам:

1. За начальное приближение выбираем любое $\boldsymbol{x}^0$, удовлетворяющее условиям (18);
2. Вычисляем координаты градиента $\boldsymbol{Y}^k = -J'_p(\boldsymbol{x}^k)$ (начиная с k=0) по формуле
$$y_i^k = -d_i - \left(V\boldsymbol{x}^k\right)_i \left(V\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}^k\right)^{-\frac{1}{2}}.$$
3. Вычисляем $\overline{x_i^k}$ по формуле (19);
4. Определяем $\boldsymbol{x}^{k+1}$ по формуле
$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + (1+k)^{-1}\left(\overline{\boldsymbol{x}^k} - \boldsymbol{x}^k\right);$$
5. Этапы 2–4 повторяем;
6. Процесс останавливаем, если $\boldsymbol{x}^k = \overline{\boldsymbol{x}^k}$.

В этом случае нетрудно показать, что $\left(-J'_p(x_k), x - x_k\right) \geq 0$ при всех $\boldsymbol{x} \in \widehat{U}$. В силу выпуклости функции $J_p(\boldsymbol{x})$ и последнего неравенства на основе теоремы 5 гл.1 работы [7] можно утверждать, что $x_k \in \widehat{U}_{p^*}$

Замечание 1. В случае когда ограничения на распределение ресурсов заданы соотношениями вида (1) алгоритм метода отличается лишь пунктом 3. В этом случае $\overline{\boldsymbol{x}^k}$ определяется как решение задачи линейного программирования

$$\inf_{x \in U} \sum_{i=1}^m y_i^k x_i = \sum_{i=1}^m y_i^k \overline{x_i^k}.$$

Заключение. В работе не рассматривается вопрос о способах вычисления ожидаемой эффективности и рисков отдельных операций. Наиболее простой подход возможен в случае, когда имеется статистика результатов операций. Тогда за ожидаемую эффективность принимается среднее значение, а за риск принимается среднеквадратическое отклонение. Однако в большинстве случаев ожидаемая эффективность оценивается по модели, а за риск принимается стандартное отклонение модели. Способы моделирования разрабатываются в каждом конкретном случае. Задачи оптимизации с учетом риска, связанные с оптимизацией плана выездных налоговых проверок, ранее рассматривались авторами. Результаты исследования опубликованы в ряде работ (см., например, [8, 9]). В качестве модели для оценки эффективности (т.е. ожидаемого доначисления налогов) разработан модифицированный вариант непараметрического оценивания регрессии. Модификация была вызвана необходимостью повышения качества модели при дефиците наблюдений.

В работе построена функция $J_p(\boldsymbol{x})$, отражающая эффективность и риск выбранного решения. В леммах показано, что функция $J_p(\boldsymbol{x})$ является выпуклой, а ее производная удовлетворяет условию Липшица. Это позволяет применить метод условного градиента для оптимизации этой функции. Приведены простые формулы для вычислений на каждом этапе метода условного градиента и указан этап, на котором вычисления заканчиваются. Простота вычислений показывает, что рассматриваемый в работе метод может быть использован в достаточно больших системах.

Литература

1. Кирута А.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б. Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических системах (вероятностный подход). Л.: Наука, 1980. 287 с.

2. Массе П. Критерии и методы оптимального определения капиталовложений. М.: Статистика, 1971. 191 с.

3. Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности (Теория ожидаемого эффекта). М.: Наука, 2002. 215 с.

4. Шоломицкий А.Г. Теория риска. Выбор при неопределенности и моделирование риска. М.: Изд. Дом ГУ ВШЭ, 2005. 400 с.

5. Ротарь В.И., Шоломицкий А.Г. Об оценке рисков в страховой деятельности // Экономика и математические методы. 1996. Т. 32, № 1. С. 96–105.

6. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.

7. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 392 с.

8. Букаев Т.И., Романов А.Н., Голичев И.И. Пути повышения эффективности налогового контроля // Налоговая политика и практика. 2004. № 2. С. 35–39.

9. Модернизация налогового контроля (модели и методы) / под ред. А.Н. Романова. М.: ИНФРА-М: Вузовский учебник, 2010. 320 с.

References

1. Kiruta A.Ya., Rubinov A.M., Yanovskaya E.B. Optimal choice of allocations in complex socio-economic systems (probabilistic approach). Leningrad, Nauka, 1980. 287 p.

2. Massé P. Le choix des investissments criteres et methodes. Russian edition: Kriterii i metody optimalnogo opredeleniya kapitalovlozheniy. Moscow, Statistika, 1971. 191 p.

3. Smolyak S.A. Evaluating the effectiveness of investment projects under conditions of risk and uncertainty (Expected effect theory). Moscow, Nauka, 2002. 215 p.

4. Sholomitsky A.G. Risk theory. Choice under uncertainty and risk modeling. Uchebnoe posobie dlya vuzov. Gosudarstvennyy universitet Vysshaya shkola ekonomiki. Moscow, Izdatelskiy dom GU VShE, 2005. 400 p.

5. Rotar V.I., Sholomitsky A.G. On the evaluation of risks in insurance activity. Ekonomika i matematicheskie metody, vol. 32, no. 1, 1996, pp. 96–105.

6. Vasilyev F.P. Methods to solve extreme problems. Moscow, Nauka, Glavnaya redaktsia fiziko-matematicheskoy literatury, 1981. 400 p.

7. Vasilyev F.P. Numerical methods to solve extreme problems. Moscow, Nauka. 1988. 392 p.

8. Bukaev T.I., Romanov A.N., Golichev I.I. Ways to enhance the effectiveness of tax control. Nalogovaya politika i praktika, no. 2, 2004, pp. 35–39.

9. Tax control modernization (models and methods). Monografiya. A.N. Romanov (ed.). Moscow, INFRA – Moscow, Vuzovskiy uchebnik, 2010. 320 p.

GRADIENT METHODS TO SOLVE THE OPTIMIZATION PROBLEM OF RESOURCE ALLOCATION TAKING INTO ACCOUNT EFFICIENCY AND RISK

© I.I. Golichev[1], N.I. Luchnikova[2]

[1] Institute of Mathematics with Computer Centre, Ufa Federal Research Centre, RAS,
112, ulitsa Chernyshevskogo, 450008, Ufa, Russian Federation

[2] Financial University under the Government of the Russian Federation, Ufa Branch,
69/1, ulitsa Mustaya Karima, 450008, Ufa, Russian Federation

Based on the gradient methods for minimizing functions, a numerical approach has been developed in order to solve the optimization problem of resource allocation taking into account efficiency and risk. The basis for developing the programs under uncertainty is formed by the planning stages for the program-target method (the optimization stage). Optimization always involves the use of models. There is a lot of literature focused on the problem of constructing various models. The most common optimization technique is the gradient method. The conditional gradient method has been chosen among a set of gradient methods, since it proves out to be not only effective, but also quite simple. This is seen in the algorithm section of the conditional gradient method, where each step of the method is described by simple formulas and the process termination sign is indicated.

Key words: efficiency, risk, optimal management, gradient.