

УДК 534.1; 539.3.

DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-3-5-11

**ВЫНУЖДЕННЫЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА**

© М.А. Ильгамов, М.М. Шакирьянов

Исследованы изгибные колебания трубопровода под действием переменного давления транспортируемой жидкости и вертикального колебательного движения опор. Одна из опор трубопровода неподвижна относительно основания, другая – может скользить по нему. Течением жидкости внутри трубопровода пренебрегается. Учитывается взаимное влияние продольной и окружной деформаций, внутреннего давления и изменения кривизны осевой линии трубы. Рассмотрена первая форма колебаний. Отдельно изучены нелинейные вынужденные, параметрические колебания и их взаимодействие. Для амплитуд колебаний получены приближенные аналитические формулы. Приводится сравнение результатов приближенного аналитического и численного решений.

Ключевые слова: трубопровод, опора, переменное давление, вынужденные и параметрические колебания.

**Введение.** Трубопроводы в машинах и аппаратах, в оборудовании энергетики, нефтехимии и т.д. являются распространенными и ответственными элементами. Поэтому изучение их эксплуатационных характеристик является всегда актуальным. В частности, возбуждение вынужденных и параметрических колебаний в трубопроводных системах и установление закономерностей их взаимодействия представляет практический интерес.

Теория и методы решения задач взаимодействия трубопроводов и шлангов с внутренним и внешним потоками жидкости или воздуха рассмотрены в монографии [1]. В ней затронуты также вопросы параметрических колебаний шлангов, вызванных изменениями величин внутреннего давления и скорости внешнего потока. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ, исследованы в [2]. В [3] изучены нелинейные колебания консольного трубопровода, транспортирующего жидкость, механизм возникновения хаотических режимов.

В [4] разработан метод численного решения задач о свободных колебаниях слоистых анизотропных композитных оболочек вращения. Определение частот свободных колебаний подкрепленной кольцевыми ребрами цилиндрической оболочки из стеклопластика, внутри которой течет жидкость, проведено в [5]. В [6] исследовано влияние малой присоединенной

массы на частоту и форму свободных колебаний тонкой оболочки.

Параметрические колебания участка трубопровода изучены в [7]. В [8] рассмотрены нелинейные параметрические колебания продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с наполнителем.

Теоретическое и экспериментальное исследование вынужденных и параметрических изгибных колебаний трубы с внутренним потоком жидкости выполнено в [9, 10]. Влияние внешнего и внутреннего воздействия на изгибные колебания трубы, транспортирующей жидкость со сверхкритической скоростью, изучено в [11]. В [12] представлен широкий обзор литературы, посвященной исследованию динамических явлений в трубопроводных системах. Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления рассмотрены в [13].

Настоящая работа посвящена исследованию взаимного влияния вынужденных и параметрических колебаний участка трубопровода с транспортируемой жидкостью, обусловленных действиями переменного внутреннего давления и подвижных опор.

**Постановка задачи.** Рассматриваются изгибные колебания трубопровода под действием внутреннего переменного давления и

ИЛЬГАМОВ Марат Аксанович – чл.-корр. РАН, Башкирский государственный университет, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, e-mail: ilgamov@anrb.ru

ШАКИРЬЯНОВ Марат Масгутьянович – к.ф.-м.н., Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, e-mail: shakmar9@mail.ru

горизонтального движения опор. Трубопровод заполнен идеальной несжимаемой жидкостью и шарнирно закреплен на двух опорах (рис. 1). Одна из опор неподвижна относительно основания, а другая может скользить по нему. При этом скользящая опора прикреплена к основанию с помощью линейно упругих элементов. Длина трубы, ее внутренний радиус и толщина стенки  $L$ ,  $R$  и  $h$ , а суммарная масса однородной трубы и жидкости –  $m$ .

В статическом состоянии труба изогнута собственным весом и находится под действием внутреннего постоянного давления  $p_0$  (внешнее давление принимается равным нулю). В момент времени  $t$  суммарное давление  $p$  в жидкости становится переменным, и одновременно с ним опоры начинают совершать вертикальные поступательные перемещения  $s(t)$ . На рис. 1 начало отсчета горизонтальной оси  $x$  совмещено с неподвижной опорой. Здесь также изображены элемент трубы длиной  $dx$  массы  $dm=(m/L)dx$ , его изгибное перемещение  $W$ , относительное, переносное и гравитационное ускорения  $a_r$ ,  $a_e$  и  $g$ , относительная и переносная составляющие силы инерции  $d\Phi_r = a_r dm$  и  $d\Phi_e = a_e dm$ , сила тяжести  $gdm$ .

Нелинейное дифференциальное уравнение изгибных колебаний трубы, учитывающее взаимодействия внутреннего давления и изменения кривизны осевой линии, окружной и продольной деформаций выведено в [14]. Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} & (g - a_r - a_e) dm - EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} dx - \\ & - \left[ Fp(1 - \chi) - \alpha \int_0^L \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx \right] \times \\ & \times \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx = 0, a_r = \ddot{W}, a_e = \ddot{s}, \quad (1) \\ & J = \frac{\pi}{4} \left[ (R + h)^4 - R^4 \right], \chi = \frac{2\nu}{1 + \lambda}, \\ & \lambda = \frac{Eh}{CL}, \alpha = \frac{\pi EhR}{(1 + \lambda)L}, F = \pi R^2. \end{aligned}$$

Здесь и далее точки над буквами обозначают производные по времени  $t$ ;  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала трубы,  $C$  – коэффициент упругости элементов крепления опоры к основанию,  $\lambda$  – параметр жесткостей трубы и опоры,  $\chi$  – параметр продольной силы в трубопроводе, возникающей из-за кольцевой деформации под внутренним давлением. При

абсолютно жестких опорах  $\lambda = 0$ ,  $\chi = 2\nu$ , при свободном скольжении  $\lambda = \infty$ ,  $\chi = 0$ ,  $\alpha = 0$ .

Суммарное внутреннее давление в трубе и вертикальные перемещения опор задаются формулами

$$p = p_0 + p_a \sin \Omega_1 t, \quad s = s_0 \sin \Omega_2 t, \quad (2)$$

где  $p_a$  и  $s_0$  – амплитуды динамической части давления и перемещения фундамента,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  – круговые частоты.

Функция прогиба, удовлетворяющая условиям шарнирного крепления к опорам, принимается в виде одночленной аппроксимации

$$W = [W_0 + w(t)] \sin \beta x, \quad \beta = \pi / L, \quad (3)$$

где  $W_0$  и  $w(t)$  – статическая и динамическая составляющие прогиба средней точки пролета.

Подставляя (2), (3) в уравнение (1) и интегрируя его по  $x$  в пределах от 0 до  $L$  по методу Бубнова–Галеркина, получаем

$$\begin{aligned} & \ddot{w} + \omega^2 (1 - 2\mu \sin \Omega_1 t) (W_0 + w) + \\ & + \gamma (W_0 + w)^3 = \frac{4}{\pi} (g + s_0 \Omega_2^2 \sin \Omega_2 t), \\ & \omega^2 = \frac{\beta^2 F (1 - \chi) (p_* - p_0)}{m_1}, \gamma = \frac{\alpha \beta^4 L}{2m_1}, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{p_a}{2(p_* - p_0)}, \quad p_* = \frac{\beta^2 EJ}{F(1 - \chi)},$$

$$m_1 = \pi \left\{ \rho_0 R^2 + \rho \left[ (R + h)^2 - R^2 \right] \right\}.$$

Здесь  $\rho$  и  $\rho_0$  – плотности материала трубы и жидкости.

Полагая в уравнении (4)  $w(t)=0$ ,  $p_a=0$ ,  $s_0=0$ , определяем статическую составляющую прогиба середины пролета трубопровода. Имеем

$$W_0^3 + \frac{2F(1 - \chi)}{\alpha \beta^2 L} (p_* - p_0) W_0 - \frac{8m_1 g}{\pi \alpha \beta^4 L} = 0.$$

Решение этого уравнения без первого члена неограниченно возрастает при значении среднего давления  $p_0 = p_*$ . Поэтому значение последнего может быть названо критическим [13]. Согласно формуле (4), значение критического давления растет с увеличением взаимного влияния продольной и окружной деформаций трубы и падает с уменьшением жесткости элементов крепления опоры к основанию.

Из уравнения (4) можно видеть, что движение трубы складывается из взаимодействующих между собой нелинейных параметрических и вынужденных колебаний.

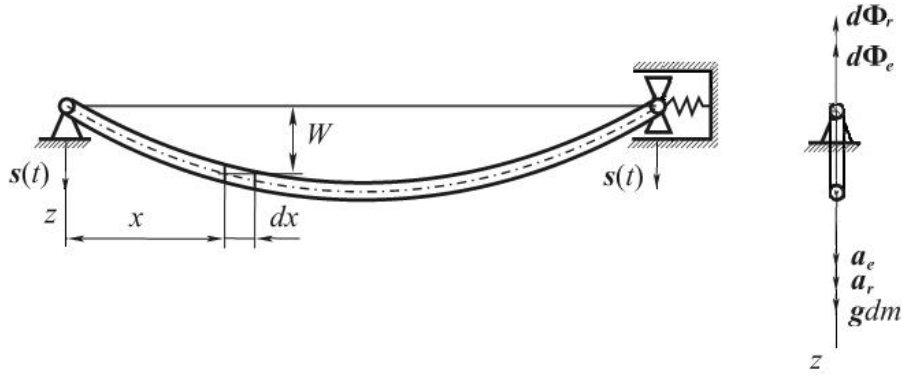


Рис. 1. Расчетная схема трубопровода

Начальные условия следующие

$$w = 0, \dot{w} = 0 \quad (t = 0). \quad (5)$$

Нелинейная задача Коши (4), (5) решается численно методом Рунге-Кутты. Затем к этому решению применяется дискретное преобразование Фурье.

Далее рассмотрим динамику трубопровода, расположенного вне зоны действия сил гравитации. При этом  $W_0 = 0$ . Уравнение (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{w} + \omega^2(1 - 2\mu \sin \Omega_1 t)w + \gamma w^3 = \\ = \varepsilon \sin \Omega_2 t, \quad \varepsilon = 4s_0 \Omega_2^2 / \pi. \end{aligned} \quad (6)$$

Для анализа динамики такого трубопровода отдельно исследуем его установившиеся вынужденные и параметрические колебания с помощью приближенных аналитических подходов.

**Вынужденные колебания.** В случае только постоянного внутреннего давления ( $p_a=0$ ) вынужденные колебания трубопровода происходят из-за вертикальных колебательных движений опор. Тогда уравнение (6) упрощается

$$\ddot{w} + \omega^2 w + \gamma w^3 = \varepsilon \sin \Omega_2 t. \quad (7)$$

Приближенное решение (7) при установившихся вынужденных колебаниях трубы будем определять функцией [15]

$$w = a_1 \sin \Omega_2 t + b_1 \cos \Omega_2 t. \quad (8)$$

Квадрат амплитуды вынужденных колебаний равен  $A^2 = a_1^2 + b_1^2$ .

Подставляя функцию (8) в уравнение (7) и применяя метод гармонического баланса, получаем

$$a_1^3 + \frac{4(\omega^2 - \Omega_2^2)}{3\gamma} a_1 = \frac{16s_0 \Omega_2^2}{3\pi\gamma}, \quad b_1 = 0. \quad (9)$$

Следовательно, при круговой частоте линейного резонанса ( $\Omega_2 = \omega$ ) амплитуда  $A$  нелинейных

вынужденных колебаний трубопровода вычисляется по формуле

$$A = 4 \left( \frac{\pi s_0 f^2}{3\gamma} \right)^{1/3}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (10)$$

Из формулы (10) следует, что в окрестности линейного резонанса амплитуда нелинейных вынужденных колебаний трубопровода имеет конечное значение. Это является характерной особенностью нелинейных колебаний. Кроме того, с увеличением частоты собственных колебаний трубы ее амплитуда вынужденных колебаний увеличивается. Данное обстоятельство объясняется рассматриваемым случаем  $\Omega_2 = \omega$  и увеличением переносных составляющих сил инерции, которые прямо пропорциональны квадрату  $\Omega_2$  круговой частоты колебаний опор.

**Параметрические колебания.** Эти колебания имеют место в случае действия переменного внутреннего давления в трубе и при неподвижных опорах ( $s=0$ ). Уравнение (6) запишется

$$\ddot{w} + \omega^2(1 - 2\mu \sin \Omega_1 t)w + \gamma w^3 = 0. \quad (11)$$

Наибольший практический интерес представляют установившиеся колебания в окрестности главного параметрического резонанса [15]. Поэтому приближенное решение уравнения (11) можно представить в виде ( $\Omega_1 \approx 2\omega$ )

$$w = a_2 \sin(\Omega_1 t / 2) + b_2 \cos(\Omega_1 t / 2). \quad (12)$$

После подстановки (12) в (11) и применения метода гармонического баланса имеем

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \Omega_1^2 / 4 + 3\gamma A^2 / 4)a_2 - \mu \omega^2 b_2 = 0, \\ -\mu \omega^2 a_2 + (\omega^2 - \Omega_1^2 / 4 + 3\gamma A^2 / 4)b_2 = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$A^2 = a_2^2 + b_2^2.$$

Из решения системы уравнений (13) следует

$$A = 4\pi f \sqrt{\frac{1}{3\gamma} \left( \frac{f_1^2}{4f^2} - 1 + \mu \right)}, \quad f_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi}. \quad (14)$$

Таким образом, в окрестности главного резонанса амплитуда  $A$  параметрических колебаний зависит как от параметров переменного внутреннего давления, так и от геометрических и механических характеристик самой трубы. При самом резонансе параметрических колебаний ( $f_1 = 2f$ ) зависимость их амплитуды  $A$  от частоты  $f$  принимает вид

$$A = 4\pi f \sqrt{\frac{\mu}{3\gamma}}. \quad (15)$$

Следовательно, в режиме главного резонанса амплитуда параметрических колебаний возрастает с увеличением собственной частоты колебаний трубы. Это объясняется тем, что в рассматриваемом частном случае частота переменной части давления в жидкости равна удвоенной частоте собственных колебаний трубы. Поэтому вместе с собственной частотой колебаний трубы увеличивается и частота переменного давления. Тогда увеличивается и приток механической энергии за единицу времени от жидкости к трубопроводу. Следствием возросшей механической энергии трубопровода и является рост его амплитуды параметрических колебаний.

Отметим, согласно (10) при резонансе вынужденных колебаний амплитуда  $A$  пропорциональна  $f^{2/3}$ , а по (15) амплитуда параметрического резонанса пропорциональна  $f$ .

**Взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний.** В данном общем случае колебания трубы описываются уравнением (6). Его приближенное решение при уста-

новившихся вынужденных и параметрических колебаниях можно определить суммой функций (8), (12). Для определения неизвестных постоянных, фигурирующих в указанной сумме, можно применить описанную выше процедуру. Однако при этом алгебраические уравнения, определяющие постоянные при любых значениях круговых частот  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , имеют громоздкий вид. Анализ динамики взаимодействия вынужденных и параметрических колебаний трубы будем проводить при значениях частот  $\Omega_1=2\omega$  и  $\Omega_2=\omega$ . При таких частотах реализуется наиболее сильное взаимодействие указанных колебаний. Тогда вместо (6) будем иметь

$$\ddot{w} + \omega^2(1 - 2\mu \sin 2\omega t)w + \gamma w^3 = \varepsilon \sin \omega t. \quad (16)$$

Приближенное решение (16) принимаем в виде (12) с другими постоянными  $a_3$  и  $b_3$ . Применение метода гармонического баланса с указанной функцией  $w$  к уравнению (16) дает

$$-4\mu\omega^2 a_3 + 3\gamma A^2 b_3 = \frac{16}{\pi} s_0 \omega^2, \quad (17)$$

$$3\gamma A^2 a_3 - 4\mu\omega^2 b_3 = 0, \quad A^2 = a_3^2 + b_3^2.$$

Решение системы алгебраических уравнений (17) определено численно.

Расчеты были проведены для стальной трубы, заполненной жидкостью, с параметрами:  $L = 1.2$  м,  $R = 0.01$  м,  $h = 0.0005$  м,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho_0 = 800$  кг/м<sup>3</sup>,  $p_0 = 6.0$  МПа,  $p_a = 0.3, 0.6$  МПа,  $C = 64.0$  МПа. Амплитуда перемещения опор:  $s_0 = 0.0003, 0.0007$  м. При принятых значениях параметров задачи частота  $f$  собственных колебаний трубы по (10) составляет приблизительно 18 Гц, а критическое внутреннее давление равно 9.99 МПа. Таким образом, реализуется случай  $p_0 < p_*$ .

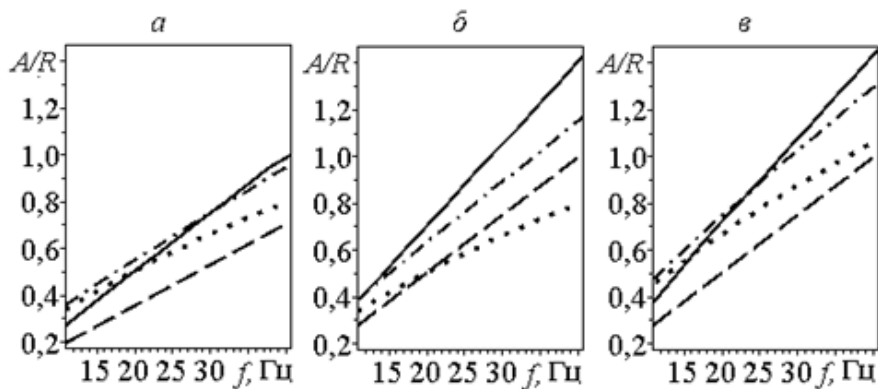


Рис. 2. Зависимости относительной амплитуды  $A/R$  от частоты  $f$ :  $a$  – при  $s_0 = 0.0003$  м и  $p_a = 0.3$  МПа;  $b$  – при  $s_0 = 0.0003$  м и  $p_a = 0.6$  МПа;  $v$  – при  $s_0 = 0.0007$  м и  $p_a = 0.6$  МПа

На рис. 2 изображены зависимости амплитуд динамической составляющей прогиба от собственной частоты колебаний трубы. Здесь по вертикальным осям отложены безразмерные амплитуды, отнесенные к радиусу трубы. Точечные, штриховые и штрихпунктирные линии на графиках представляют результаты расчетов по приближенным аналитическим выражениям (10), (15) и (17), полученным для амплитуд вынужденных, параметрических колебаний, а также их взаимодействия.

**Численное моделирование. Сравнение результатов.** Сплошными линиями на всех графиках нанесены результаты численного интегрирования уравнения (16) с начальными условиями (5). Наблюдается общая закономерность: относительные амплитуды  $A/R$  растут с ростом частоты собственных колебаний  $f$ . Кроме того, приближенное аналитическое решение (штрихпунктирные линии) и численное решение (сплошные линии) находятся в качественном согласии (при некоторых частотах совпадают). Из сравнения соответствующих линий на фрагментах *a* и *б* можно видеть, что при равных значениях амплитуды перемещения опор увеличение амплитуды динамической части давления приводит к увеличению амплитуды параметрических колебаний трубы. Поэтому рост амплитуды при взаимодействии вынужденных и параметрических колебаний происходит главным образом за счет усиления последних. Сравнение расположения соответствующих линий на фрагментах *б* и *в* показывает, что при равенстве амплитуд динамического давления с увеличением амплитуды перемещения опор увеличиваются амплитуды вынужденных колебаний. То есть в данном случае увеличение амплитуды при взаимодействии колебаний является следствием

усиления движения опор. Из фрагментов *a* и *в* следует, что при одновременном увеличении амплитуд динамической составляющей давления и перемещения опор амплитуды при взаимодействии вынужденных и параметрических колебаний также увеличиваются.

Спектры частот вынужденных и взаимодействия вынужденных и параметрических колебаний трубы представлены на рис. 3. По вертикальным осям этого рисунка отложены модули  $F^*$  комплексных амплитуд.

Фрагменты *a* и *б* рис. 3 построены по результатам численного решения уравнений соответственно (7) и (16) с начальными условиями (5). Фрагмент *a* относится к случаю вынужденных колебаний, а фрагмент *б* – взаимодействия вынужденных и параметрических колебаний трубы. Эти графики не отличаются друг от друга. Можно видеть также, что преобразование Фурье выделяет колебания не только с основной частотой 18 Гц перемещения опор, но и с дробными частотами. Последнее обстоятельство является характерной особенностью установившихся колебаний в нелинейных системах [15]. Из графиков также следует, что разница в значениях основной и соседних частот возникающих добавочных колебаний составляет приблизительно 2 Гц. Главное отличие графиков фрагментов *a* и *б* состоит в значениях модулей комплексных амплитуд. В обоих случаях вынужденных колебаний и взаимодействия вынужденных и параметрических колебаний значения модулей комплексных амплитуд с основной частотой колебаний остаются практически неизменными. В случае взаимодействия вынужденных и параметрических колебаний происходит существенное увеличение модулей комплексных амплитуд добавочных колебаний с частотами 16 и 20 Гц.

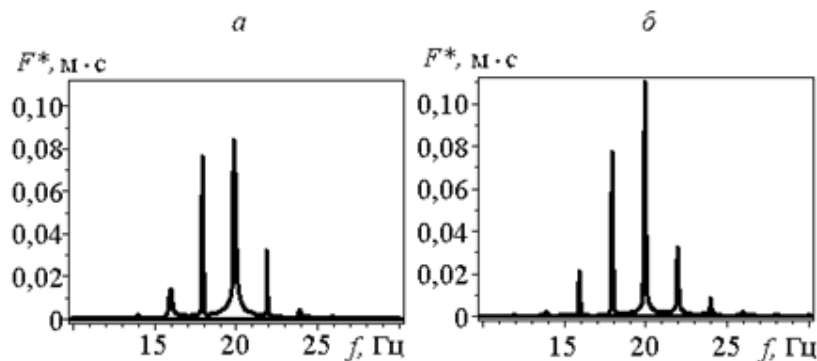


Рис. 3. Зависимости модулей  $F^*$  комплексных амплитуд от частоты  $f$ : *a* – по уравнению (7) при  $s_0 = 0.0007$  м и  $p_a = 0$  МПа; *б* – по уравнению (16) при  $s_0 = 0.0007$  м и  $p_a = 0,6$  МПа

Из результатов численного решения уравнения (11) с начальными условиями (5) следует, что зависимости динамической составляющей прогиба трубы от времени имеют вид биений. С ростом частоты собственных колебаний трубопровода растет и частота биений. Отметим также, что спектры частот, построенные на основе указанного решения, расположены в окрестности основной частоты и имеют распределенный вид.

**Заключение.** 1. Вынужденные колебания трубопровода возникают вследствие движения опор, а параметрические колебания обусловлены изменением внутреннего давления в трубе. Эти колебания существенно зависят от отношений среднего и критического давлений, частот внутреннего давления и движения опор и собственной частоты. В данной статье рассматривается только первая пространственная мода и предполагается, что среднее давление меньше критического. Взаимодействие колебаний исследуется в режиме главного параметрического резонанса и линейного резонанса вынужденных колебаний, когда это взаимодействие является наиболее сильным. Случай среднего давления, большего критического, приводит к более сложному движению, в частности, к хаотическому режиму и сплошному спектру частот колебаний.

2. В рамках указанных допущений получены приближенные аналитические выражения, определяющие амплитуды нелинейных колебаний и взаимодействия вынужденных и параметрических колебаний трубы. Эти результаты находятся в качественном согласии с соответствующим численным решением.

3. Установлено, что с увеличением частоты собственных колебаний трубы амплитуды ее вынужденных и параметрических колебаний увеличиваются.

4. Показано, что в трубопроводной системе присутствуют колебания как с основной частотой, так и с дробными частотами. При взаимодействии вынужденных и параметрических колебаний трубопровода происходит перераспределение механической энергии между их отдельными временными модами.

*Работа частично поддержана грантом РФФИ №18-01-00150\_a и средствами государственного бюджета по Госзаданию на 2019–2022 гг. (№ з.п. 0246-2019-0088).*

## Литература

1. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
2. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.
3. Pgamov M.A., Tang D.M., Dowell E.H. Flutter and forced response of a cantilevered pipe: The influence of internal pressure and nozzle discharge // J. of Fluids and Structures. 1994. Vol. 8. P. 139–156.
4. Андреев А.Н. Свободные колебания слоистых упругих композитных оболочек вращения // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 5 (213). С. 145–154.
5. Латифов Ф.С., Сейфуллаев Ф.А., Алыев Ш.Ш. Свободные колебания усиленной поперечными ребрами анизотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика с текущей в ней жидкостью // ПМТФ. 2016. Т. 57. № 4 (338). С. 158–162.
6. Лейзерович Г.С., Серегин С.В. Свободные колебания круговых цилиндрических оболочек с присоединенной малой сосредоточенной массой // ПМТФ. 2016. Т. 57. № 5 (339). С. 90–96.
7. Васина В.Н. Параметрические колебания участка трубопровода с протекающей жидкостью // Вестник МЭИ. 2007. № 1. С. 1–11.
8. Латифов Ф.С., Мехтиев М.А. Нелинейные параметрические колебания продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с наполнителем // ПМТФ. 2018. Т. 59. № 4 (350). С. 195–203.
9. Panda L.N., Kar R.C. Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with combination, principal parametric and internal resonances // J. of Sound and Vibration. 2008. V. 309. P. 375–406.
10. Миронов М.А., Пятаков П.А., Андреев А.А. Вынужденные колебания трубы с потоком жидкости // Акустический журнал. 2010. Т. 56. № 5. С. 684–692.
11. Chen L.Q., Zhang Y.L., Zhang G.C., Ding H. Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed // International J. of Non-Linear Mechanics. 2014. V. 58. P. 11–21.
12. Li S., Karney B. W., Liu G. FSI research in pipeline systems – A review of the literature // J. of Fluids and Structures. 2015. V. 57. P. 277–297.
13. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 3–13.
14. Ильгамов М.А. Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Известия РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 83–96.
15. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.

## References

1. Svetlitsky V.A. Mechanics of pipelines and hoses. Moscow, Mashinostroenie, 1982. 280 p.

2. Ilgamov M.A. Vibrations of elastic shells containing fluid and gas. Moscow, Nauka, 1969. 180 p.
3. Ilgamov M.A., Tang D.M., Dowell E.H. Flutter and forced response of a cantilevered pipe: The influence of internal pressure and nozzle discharge. *J. of Fluids and Structures*, 1994, vol. 8, pp. 139–156.
4. Andreev A.N. Free vibrations of elastic laminated composite rotating shells. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1995, vol. 36, no. 5 (213), pp. 145–154.
5. Latifov F.S., Seyfullaev F.A., Alyev Sh.Sh. Free vibrations of a fiberglass anisotropic cylindrical shell reinforced with cross ribs and containing liquid flowing inside. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no. 4 (338), pp. 158–162.
6. Leyzerovich G.S., Seregin S.V. Free vibrations of circular cylindrical shells with a small added concentrated mass. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no. 5 (339), pp. 90–96.
7. Vasina V.N. Parametric oscillations of the pipeline division with flowing liquid. *Vestnik Moskovskogo energeticheskogo instituta*, 2007, no. 1, pp. 1–11.
8. Latifov F.S., Mekhtiev M.A. Nonlinear parametric vibrations of a longitudinally stiffened orthotropic cylindrical shell with filler. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2018, vol. 59, no. 4 (350), pp. 195–203.
9. Panda L.N., Kar R.C. Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with combination, principal parametric and internal resonances. *J. of Sound and Vibration*, 2008, vol. 309, pp. 375–406.
10. Mironov M.A., Pyatakov P.A., Andreev A.A. Forced flexural vibrations of a pipe with a liquid flow. *Akusticheskiy zhurnal*, 2010, vol. 56, no. 5, pp. 684–692.
11. Chen L.Q., Zhang Y.L., Zhang G.C., Ding H. Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed. *International J. of Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 58, pp. 11–21.
12. Li S., Karney B. W., Liu G. FSI research in pipeline systems – A review of the literature. *J. of Fluids and Structures*, 2015, vol. 57, pp. 277–297.
13. Ganiev R.F., Ilgamov M.A., Khakimov A.G., Shakiryaynov M.M. Spatial oscillations of a pipeline in continuous medium under the action of alternate internal pressure. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2016, no. 6, pp. 3–13.
14. Ilgamov M.A. Dynamics of a pipeline under the action of internal impact pressure. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdykh tel*, 2017, no. 6, pp. 83–96.
15. Bolotin V.V. *Dynamic stability of elastic systems*. Moscow, Gostekhizdat, 1956. 600 p.

---

## FORCED AND PARAMETRIC VIBRATIONS OF A PIPE

© M.A. Ilgamov<sup>1,2</sup>, M.M. Shakiryaynov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Bashkir State University,  
32, ulitsa Zaki Validi, 450076, Ufa, Russian Federation

<sup>2</sup>R.R. Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
71, prospekt Oktybrya, 450054, Ufa, Russian Federation

In this paper, we study flexural vibrations of a pipe occurred under the action of alternate pressure of transported fluid and vertical vibrational motion of its supports. One of the pipe supports is immobile relative to the base, while the other can slide along it. The flow of fluid inside the pipe is ignored. Account is taken of the mutual effect of longitudinal and circular deformations, internal pressure and change in the curvature of the pipe axial line. The first type of vibrations is considered. Nonlinear forced and parametric vibrations and their interaction are studied separately. Approximate analytic formulas are derived for vibration amplitudes. A comparison is given between the results of approximate analytic and numerical solutions.

Key words: pipe, support, alternate pressure, forced and parametric vibrations.