

УДК 534.113

DOI: 10.31040/2222-8349-2019-0-4-5-10

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ

© М.А. Ильгамов, А.А. Филиппов

Исследуется линейный и нелинейный статический изгиб прямоугольной пластины, находящейся под действием двустороннего давления газа. Принимается уточненное выражение поперечной распределенной силы, состоящей не только из разности давлений, действующих на обе стороны пластины. Она зависит также от кривизны, возникающей при изгибе, и среднего избыточного давления. Повышение этого давления приводит к уменьшению прогиба, а снижение (вакуумирование) – к возрастанию прогиба. Определяется критическое значение избыточного давления, при котором линейное решение возрастает неограниченно. Среднее избыточное давление приводит к изменению эффективной изгибной жесткости.

Ключевые слова: прямоугольная тонкая пластина, упругая статическая деформация, перепад давлений, среднее давление, линейный и нелинейный изгиб.

1. Введение. Теория изгиба тонких пластин и оболочек под действием давлений p_1 , p_2 на их поверхности строится в предположении, что поперечная распределенная сила q равна разности $p_2 - p_1$. Ввиду относительной тонкости это предположение принято как в классических трудах [1–5], так и в современной литературе (например, [6–10]).

Учет разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей пластины приводит к зависимости поперечной нагрузки q не только от перепада давления, но и самого изгиба [11–13]. Так, в случае изгиба свободно опертой по кромкам прямоугольной пластины толщиной h [14]

$$q = p_2 - p_1 + p_m h \nabla^2 w, \quad (1.1)$$

$$p_m = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где $w(x, y)$ – функция прогиба. Это выражение получено в рамках гипотез Кирхгоффа и в предположении, что на площади $h \cdot 1$ кромок пластины давление не действует. При положительном среднем давлении p_m последний член (1.1) приводит к увеличению эффективной жесткости пластины, а при $p_m < 0$ – к ее уменьшению. Более того, в случае вакуумирования поверхностей пластины наличие последнего члена в (1.1) дает необычный результат – выпучивание пластины.

Показано, что влияние последнего члена выражения (1.1) на изгиб квадратной пластины с длиной сторон L тем больше, чем больше безразмерный параметр

$$\alpha = \frac{p_m h L^2}{2\pi^2 D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (1.2)$$

Таким образом, рассматриваемая поправка заметнее для тонких пластин и пленок, в частности микро- и нанопленок. При $\alpha \gg 1$ собственной изгибной жесткостью, пропорциональной $(h/L)^3$, уже не определяется изгиб. Даже при малых изгибах определяющим становятся нелинейный член, пропорциональный продольной силе и квадрату угла поворота, и поправка в (1.1). При изгибе и растяжении нанопленки учитывается также поверхностный эффект, связанный различием упругих свойств приповерхностного слоя и основного объема материала [15].

2. Постановка задачи. Рассматривается статический нелинейный изгиб прямоугольной пластины размерами L_x и L_y и толщиной h . Отношение сторон находится в пределах $1/2 \leq L_x/L_y \leq 2$. Как известно [6], при большем удлинении пластина изгибается как очень длинная. На нижнюю и верхнюю поверхности пластины действуют давления газов $p_0 + p_1$ и $p_0 + p_2$. Для определенности за p_0 примем атмосферное давление, которое действует также на поверх-

ности кромок $x=0, L_x$ и $y=0, L_y$. Предполагается, что под всесторонним давлением p_0 пластина является плоской и свободной от напряжений.

Избыточные давления p_1, p_2 являются равномерными и не зависят от деформации пластины. Они не действуют на кромки пластины и могут быть положительными и отрицательными (вакуумирование). В последнем случае $|p_1| < p_0, |p_2| < p_0$. Не учитывается влияние плотностей газов на давления. Направление оси z , нагрузки q и прогиба $w(x, y)$ положительно вниз. При указанных допущениях распределенная поперечная сила q определяется выражением (1.1).

Система нелинейных уравнений изгиба имеет вид [6]

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{q}{h}, \\ \frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где E, D – модуль упругости и изгибная жесткость пластины, σ_x, σ_y, τ – напряжения в срединной поверхности, Φ – функция напряжений.

Принимаем условия подвижного шарнирного закрепления кромок [6]

$$\begin{aligned} w &= 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= 0, \quad (x = 0, L_x) \\ w &= 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= 0, \quad (y = 0, L_y) \end{aligned} \quad (2.2)$$

и условия защемления, допускающие свободные перемещения в плоскости пластины,

$$\begin{aligned} w &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= 0, \quad (x = 0, L_x) \\ w &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= 0, \quad (y = 0, L_y). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Задача состоит в приближенном решении системы уравнений (2.1) при граничных усло-

виях (2.2) и (2.3) и поперечной силе (1.1). Целью анализа является выявление влияния второго члена в выражении поперечной нагрузки (1.1). Отметим, что нагрузка (1.1) определена в линейном приближении [14].

3. Линейный изгиб. Из (1.1) и (2.1) получаем уравнение

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - p_m h \nabla^2 w = p_e, \quad p_e = p_2 - p_1. \quad (3.1)$$

В случае шарнирного закрепления и, защемления краев пластины приняв приближенные функции прогиба

$$\begin{aligned} w &= f \sin ax \sin by, \quad w = f \sin^2 ax \sin^2 by, \\ a &= \pi / L_x, \quad b = \pi / L_y, \end{aligned} \quad (3.2)$$

удовлетворяющие условиям (2.2), (2.3), и проинтегрировав (3.1), получаем выражение для стрелы прогиба соответственно

$$\begin{aligned} f &= \frac{16 p_e}{\pi^2 D c^4 (1 + \alpha)}, \quad \alpha = \frac{p_m h}{D c^2}, \\ c^2 &= a^2 + b^2, \\ f &= \frac{p_e}{D (3b^4 + 2a^2 b^2 + 3a^4) (1 + \alpha)}, \\ \alpha &= \frac{3c^2 h p_m}{4D (3b^4 + 2a^2 b^2 + 3a^4)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Итак, влияние второго члена в уравнении (3.1) представлено в решении (3.3) безразмерным параметром α . Можно говорить об эффективной жесткости на изгиб $D(1 + \alpha)$. В приближении $12\pi^{-2}(1 - \nu^2) \approx 1$ этот параметр представляется в более простом виде:

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \left(\frac{p_m}{E} \right) \left(\frac{L_x}{h} \right)^2 \frac{1}{(1 + \lambda^2)}, \\ \alpha &\approx \left(\frac{p_m}{E} \right) \left(\frac{L_x}{h} \right)^2 \frac{3(1 + \lambda^2)}{4(3\lambda^4 + 2\lambda^2 + 3)}, \\ \lambda &= L_x / L_y = b / a. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для квадратной пластины ($L_x = L_y = L$) они равны

$$\alpha \approx \left(\frac{p_m}{2E} \right) \left(\frac{L}{h} \right)^2, \quad \alpha \approx \frac{3}{16} \left(\frac{p_m}{E} \right) \left(\frac{L}{h} \right)^2. \quad (3.5)$$

В случае шарнирного закрепления квадратной пластины параметр α в два раза меньше, чем при цилиндрическом изгибе пластины (формула (3.4) при $\lambda=0$). Отношение второго значения α к первому по (3.5) равно 3/8. Это объясняется тем, что кривизна срединной поверхности защемленной пластины меняет знак, а у шарнирно закрепленной пластины кривизна

имеет один знак по всей поверхности. Поэтому влияние второго члена в уравнении (3.1) является наибольшим в случае шарнирного закрепления.

Оценки влияния среднего давления p_m проведем для квадратной пластины с шарнирным закреплением. При одних и тех же значениях модуля E , размеров L и h рассмотрим три варианта давлений:

- а) $p_1=0.1$ бар, $p_2=0.2$ бар,
- б) $p_1=20$ бар, $p_2=20.1$ бар,
- в) $p_1=-0.9$ бар, $p_2=-0.8$ бар.

Соответственно им, среднее давление $p_m=0.15$ бар, $p_m=20.05$ бар, $p_m=-0.85$ бар, но для всех вариантов перепад давлений одинаков и равен $p_e = p_2 - p_1 = 0.1$ бар.

Представим первое решение (3.3) для квадратной пластины с учетом (3.5) в виде безразмерного отношения

$$F = \frac{\pi^2 D c^4 f}{16 p_e} \approx \left(1 + \frac{p_m}{2E} \left(\frac{L}{h} \right)^2 \right)^{-1}, \quad (3.6)$$

где все величины постоянны, кроме p_m . Для случая $E=2 \cdot 10^6$ бар, $L/h=10^3$ и найденных выше трех значений p_m по (3.6) $F \approx 0.96; 0.17; 1.27$. Таким образом, в первом варианте p_1 и p_2 прогиб мало зависит от среднего избыточного давления и практически совпадает с результатом по классической теории тонких пластин ($F=1$). Во втором варианте намного меньше, в третьем – больше.

Рассмотрим случай защемления краев пластины. С учетом вторых выражений из (3.3) и (3.5) получаем следующее отношение:

$$F \approx \left(1 + \frac{3}{16} \left(\frac{p_m}{E} \right) \left(\frac{L}{h} \right)^2 \right)^{-1}. \quad (3.7)$$

Для приведенных выше вариантов давлений $F \approx 0.98; 0.35; 1.09$. В случае защемленной пластины влияние среднего давления меньше, чем в случае (3.6).

Значение $\alpha = -1$, при котором линейные решения (3.3) неограниченно возрастают, можно считать критическим. Соответствующие средние избыточные давления для случаев шарнирного закрепления краев и защемления равны

$$\begin{aligned} (p_m)_{cr} &= -\frac{Dc^2}{h}, \\ (p_m)_{cr} &= -\frac{4D(3b^4 + 2a^2b^2 + 3a^4)}{3c^2h}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Указанные результаты получены в предположении, что на краях пластины действует только атмосферное давление p_0 , а на ее поверхности действуют давления $p_0 + p_1$, $p_0 + p_2$. В случае, когда на кромки действует давление $p_0 + p_m$, исчезает зависимость решения от среднего избыточного давления p_m ($\alpha=0$). Если при этом $p_1=p_2=p_m$, то приходим к абсолютной устойчивости плоской формы пластины. Устойчивость упругой полосы под всесторонним давлением рассматривалась в работах, обзор которых приведен в [11].

На основе соотношений (3.5) построены зависимости между упруго-статической p_m/E и геометрической характеристикой пластины L/h для случая, когда параметр $\alpha=0.01$ (рис. 1). Кривая 1 описывает зависимость для шарнирного закрепления; кривая 2 – защемление краев пластины. Для таких комбинаций нагрузок и характеристик пластины, при которых соответствующая этому состоянию точка лежит выше графика, эффективная жесткость пластины $D(1+\alpha)$ превышает изгибную жесткость D более чем на 1%. Соответственно для точек, лежащих ниже графика, отклонение не превышает 1% (справедлива классическая теория изгиба тонкой пластины).

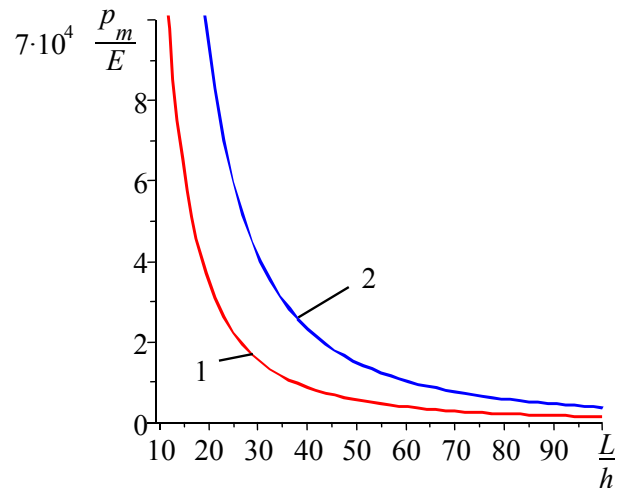


Рис. 1

4. Нелинейный изгиб прямоугольной пластины со свободно смещающимися краями. Ограничимся рассмотрением изгиба пластины с защемленными краями. Предполагаем, что края свободно перемещаются в плоскости пластины.

Из второго уравнения (2.1) и второго выражения (3.2) получаем (с исправлением опечаток в [6])

$$\begin{aligned}
 \frac{32\Phi}{Ef^2} = & \lambda^2 \cos 2ax + \frac{1}{\lambda^2} \cos 2by - \\
 & - \frac{2\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} \cos 2ax \cos 2by + \\
 & + \frac{\lambda^2}{(1+4\lambda^2)^2} \cos 4ax \cos 2by + \\
 & + \frac{\lambda^2}{(4+\lambda^2)^2} \cos 2ax \cos 4by - \\
 & - \frac{1}{16} \left(\lambda^2 \cos 4ax + \frac{1}{\lambda^2} \cos 4by \right).
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Проинтегрируем первое уравнение (2.1) методом Бубнова–Галеркина. С учетом второго выражения (3.2) и функции Φ по (4.1) получаем

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{17}{256}(a^4 + b^4) + \frac{a^4 b^4}{32} \left(\frac{1}{(a^2 + 4b^2)^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{(4a^2 + b^2)^2} \right) + \frac{a^4 b^4}{8(a^2 + b^2)^2} \right) Ef^3 + \\
 & + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} (a^2 b^2 + 3(a^4 + b^4)) f \\
 & + \frac{3c^2 p_m a^2 b^2}{4\pi^2} f = \frac{p_e}{h}.
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

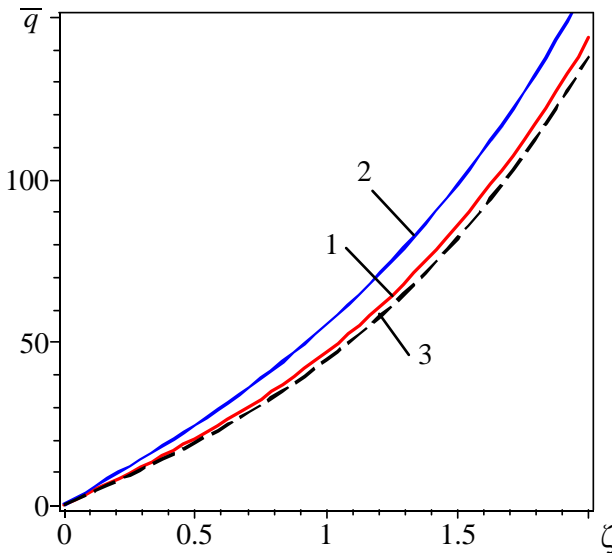


Рис. 2

Для квадратной пластины ($a=b$) со свободно смещающимися краями, с коэффициентом Пуассона $\nu=0.3$, соотношение между безразмерной стрелой прогиба и безразмерной поперечной силой \bar{q} и средним давлением \bar{p}_m приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 \bar{q} - 14.80\eta^2 \zeta \bar{p}_m = & 14.76\zeta^3 + 64.94\zeta, \\
 \bar{q} = \frac{P_e(1-\nu^2)}{E}, \quad \bar{p}_m = \frac{P_m(1-\nu^2)}{E}, \quad \zeta = \frac{f}{h}.
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

На рис. 2 и 3 приведены графики зависимости величин \bar{q} и ζ . Кривая 1 соответствует решению задачи нелинейного изгиба стальной пластины ($E=2 \cdot 10^6$ бар, $\nu=0.3$), кривая 2 – решению задачи нелинейного изгиба пластины из магниевого сплава ($E=4.5 \cdot 10^5$ бар, $\nu=0.3$), кривая 3 – классической задачи нелинейного изгиба стальной пластины.

На этих фигурах представлены решения для прямоугольной пластины, имеющей геометрические характеристики $L_x=15$ мм, $L_y=10$ мм, $h=0.2$ мм и $L_x=150$ мм, $L_y=100$ мм, $h=0.2$ мм соответственно.

Как видно из этих графиков, отклонение решения от классического тем больше, чем ниже модуль упругости материала пластины и выше среднее давление \bar{p}_m .

На рис. 4 и 5 представлены решения для квадратной пластины, имеющей геометрические характеристики $L_x=10$ мм, $L_y=10$ мм, $h=0.2$ мм и $L_x=100$ мм, $L_y=100$ мм, $h=0.2$ мм соответственно.

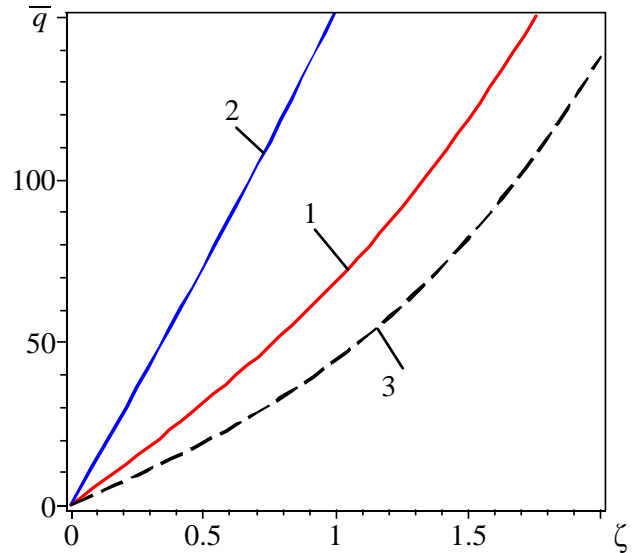


Рис. 3

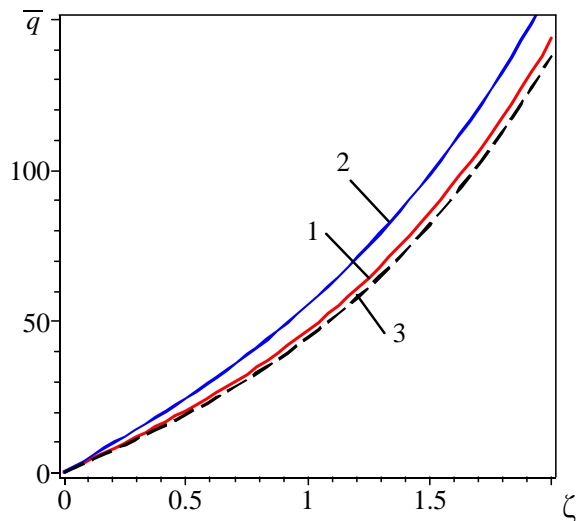


Рис. 4

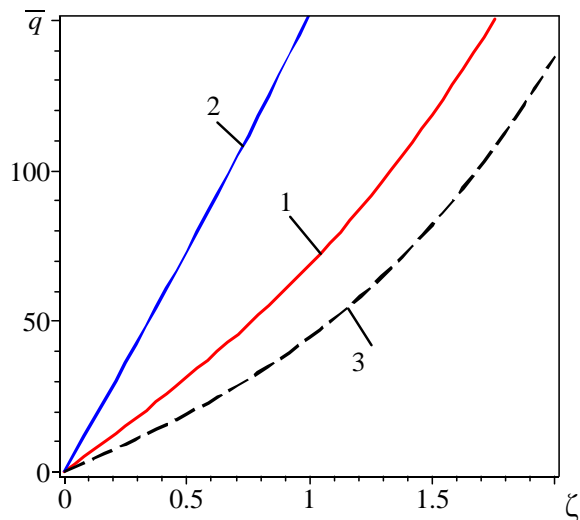


Рис. 5

5. Заключение. Влияние на изгиб среднего избыточного давления $p_m=(p_1+p_2)/2$ на поверхности тонкой пластины определяется безразмерным параметром α , приведенным в (3.4). В случае квадратной пластины длиной L этот параметр равен

$$\alpha \approx \left(\frac{kp_m}{E} \right) \left(\frac{L}{h} \right)^2,$$

где k – коэффициент, зависящий от граничных условий. При шарнирном закреплении по всем сторонам $k=1/2$, при защемлении $k=3/16$.

Среднее давление p_m приводит к увеличению эффективной изгибной жесткости $D(1+\alpha)$, где D – собственная изгибная жесткость. При $\alpha \ll 1$ справедлива классическая теория изгиба тонких пластин, основанная на гипотезах Кирхгоффа. При $\alpha \gg 1$ решение не зависит от модуля упругости материала. Это объясняется тем, что собственная жесткость D уменьшается пропорционально h^3 , а фактор среднего давления – h^1 .

Критические значения сжимающих сил в срединной поверхности пластины выше по сравнению с их классическими значениями ввиду ее большей эффективной жесткости (при $\alpha > 0$).

Постановка задачи и анализ результатов выполнены в рамках госзадания (№ 0246-2019-0088). Численно-аналитическое решение выполнено при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 18-01-00150-А и № 17-41-020400-р_а).

Литература

1. Rayleigh J.W. The Theory of Sound. V. I. London: Macmillan and Company, 1894. 500 p. (Стретт Дж.В. Теория звука. Т. I. М.: Гостехтеориздат, 1955. 504 с.)
2. Love A. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press. 1927. 643 p. (Ляв А. Математическая теория упругости. М., Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.)
3. Бубнов И.Г. Труды по теории пластин. М.: Гостехиздат, 1953. 423 с.
4. Галеркин Б.Г. Упругие тонкие плиты. Собрание сочинений. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1953. 550 с.
5. Timoshenko S. Theory of Plates and Shells. New York: McGraw – Hill Book Company Inc. 1940. 399 p. (Тимошенко С.П. Пластины и оболочки. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 460 с.)
6. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 420 с.
7. Прочность, устойчивость, колебания: справочник. Т. 1. М.: Машиностроение, 1968. 831 с.
8. Филин А.П. Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1975. 256 с.
9. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В. Расчет оболочек с упругим наполнителем. М.: Наука, 1987. 264 с.
10. Shen H.Sh. Postbuckling Behavior of Plates and Shells. Shanghai Jiao Tong University, 2017. 675 p.
11. Ильгамов М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // ДАН. 2017. Т. 476, № 4. С. 402–405.
12. Ильгамов М.А. Изгибные колебания пластины при изменении среднего давления на ее поверхностях // Акустический журнал. 2018. Т. 64, № 5. С. 598–604.

13. Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость тонкой пластины при вакуумировании ее поверхностей // ДАН. 2018. Т. 480, № 5. С. 542–544.

14. Ильгамов М.А. Обобщение уравнения изгиба тонкой пластины под действием давления газа // ПММ. 2019. Т. 83, № 1. С. 134–143.

15. Ильгамов М.А. Влияние поверхностных эффектов на изгиб и колебания нанопленок // Физика твердого тела. 2019. Т. 61, Вып. 10. С. 1825–1830.

References

1. Rayleigh J.W. The Theory of Sound. V. I. London: Macmillan and Company, 1894. 500 p. (Strutt J.W. The Theory of Sound. Russian edition. Vol. I. Moscow: Gostekhteorizdat, 1955. 504 p.)

2. Love A. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927. 643 p. (Love A. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Russian edition. Moscow, Leningrad: ONTI, 1935. 674 p.)

3. Bubnov I.G. Works on the Theory of Plates. Moscow.: Gostekhizdat, 1953. 423 p.

4. Galerkin B.G. Elastic thin plates. Collected works. Vol. 2. Moscow: AN SSSR, 1953. 550 p.

5. Timoshenko S. Theory of Plates and Shells. New York: McGraw – Hill Book Company Inc., 1940. 399 p. (Timoshenko S.P. Theory of Plates and Shells.

Russian edition. Moscow, Leningrad: Gostekhizdat. 1948. 460 p.)

6. Volmir A.S. Flexible Plates and Shells. Moscow: Gostekhizdat, 1956. 420 p.

7. Strength, Stability, Vibrations, Handbook. Vol. 1. I.A. Birger, Ya.G. Panovko (eds). Moscow: Mashinostroenie, 1968. 831 p.

8. Filin A.P. Elements of the Theory of Shells. Leningrad: Stroyizdat, 1975. 256 p.

9. Ilgamov M.A., Ivanov V.A., Gulin B.V. Calculation of Shells with an Elastic Filler. Moscow: Nauka, 1987. 264 p.

10. Shen H.Sh. Postbuckling Behavior of Plates and Shells. Shanghai Jiao Tong University, 2017. 675 p.

11. Ilgamov M.A. Influence of the ambient pressure on thin plate and film bending. Doklady Physics, 2017, vol. 62, no. 10, pp. 461–464.

12. Ilgamov M.A. Flexural vibrations of a plate under changes in the mean pressure on its surfaces. Acoustical physics, 2018, vol. 64, no. 5, pp. 605–611.

13. Ilgamov M.A. Bending and stability of a thin plate under vacuuming its surfaces. Doklady Physics, 2018, vol. 63, no. 7, pp. 244–246.

14. Ilgamov M.A. Generalization of the thin plate bending equation under the action of gas. Mechanics of Solids, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 348–355.

15. Ilgamov M.A. Influence of surface effects on buckling and vibrations of nanofilms. Physics of Solids, 2019, vol. 61, no. 10, pp. 1825–1830.

RECTANGULAR PLATE BENDING UNDER PRESSURE

© M.A. Ilgamov^{1,2}, A.A. Filippov²

¹ Bashkir State University,
32, ulitsa Zaki Validi, 450076, Ufa, Russian Federation

² Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Centre
of the Russian Academy of Sciences,
71, prospekt Oktybrya, 450054, Ufa, Russian Federation

Research is performed on linear and nonlinear static bending of a rectangular plate subjected to the action of double-sided gas pressure. A refined expression is taken for the transverse distributed force consisting not only of the difference of pressures that act on both sides of the plate. It also depends on the curvature occurring under bending and the average overpressure. An increase in this pressure results in the reduction of bending, and its decrease (vacuuming) causes larger bending. A critical overpressure value is found at which the linear solution increases indefinitely. The average overpressure leads to a change in the effective bending stiffness.

Key words: rectangular thin plate, elastic static deformation, pressure differential, average pressure, linear and nonlinear bending.