

УДК 534.1.539.3

DOI: 10.31040/2222-8349-2018-0-4-22-29

**ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ  
ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО УДАРНОГО ДАВЛЕНИЯ**

© М.М. Шакирьянов

Рассмотрены пространственные колебания трубопровода и заключенной в нем идеальной несжимаемой жидкости относительно оси, проходящей через опоры, при действии внутреннего ударного давления. Трубопровод окружен вязкой несжимаемой сплошной средой. Одна из опор является неподвижной, а другая – прикреплена к линейно-упругим элементам и может смещаться по горизонтальной плоскости. Трубу, изогнутую собственным весом и постоянным давлением заключенной в ней жидкости, отклоняют на небольшой угол от вертикальной плоскости и в некоторый момент времени отпускают без начальной угловой скорости. В этот же момент происходит гидравлический удар и в течение его времени действия внутреннее давление в трубе становится равным сумме статической и динамической составляющих. Деформации, связанные с выходом оси трубопровода из плоскости изгиба, предполагаются малыми. Поэтому в основе исследования лежит математическая модель изгибно-вращательных движений трубопровода. Учитываются взаимодействие внутреннего давления и изменения кривизны осевой линии, а также окружной деформации трубы. При исследовании изгибно-вращательных колебаний трубопровода учтены также силы гравитации, силы инерции Кориолиса, выталкивающая сила Архимеда, силы вязкого сопротивления и силы, связанные с ускорением поперечного движения трубы в окружающей среде. Колебательные движения трубопровода описываются системой двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Аппроксимируя функцию прогиба трубопровода по первой основной форме и применяя далее процедуру Бубнова–Галеркина, эта система сводится к двум нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно угла поворота и прогиба средней точки пролета трубы от времени. Задача Коши с нулевыми начальными условиями решается численным методом Рунге–Кутты. Для анализа динамики начального процесса деформирования трубопровода вводятся в рассмотрение инерционная и инерционно-упругая стадии по времени. На инерционной стадии учитываются только ударные и инерционные силы. Инерционно-упругая стадия изгибно-вращательных движений трубопровода является продолжением ее инерционной стадии. На инерционно-упругой стадии действие ударной нагрузки прекращается. На обеих стадиях деформации трубопровода получены аналитические решения. Вычисления были проведены для случая колебаний стальной трубы в водной среде при ступенчатой форме изменения динамической части внутреннего давления. Дан анализ результатов вычислений.

Ключевые слова: трубопровод, пространственные колебания, внутреннее ударное давление, стадии деформации.

В инженерных сооружениях для транспортировки жидкостей и газов широко используются трубопроводы. Под действием переменных и ударных нагрузок они могут совершать колебательные движения. При их усилении трубопровод может потерять работоспособность или разрушиться. Поэтому исследование пространственных колебаний трубопровода при действии внутреннего ударного давления представляет большой интерес.

Общие вопросы механики трубопроводов рассмотрены в [1] и других изданиях. Обзор

литературы по динамике упругих оболочек, содержащих жидкость и газ, приведен в [2]. Теоретическое и экспериментальное изучение влияния постоянного по времени перепада внутреннего давления в трубопроводе на его изгиб проводилось в [3, 4]. Исследование статики и динамики отклоненного от прямолинейной формы трубопровода при течении транспортируемой жидкости выполнено, например, в [5–7]. В [8] по собственным частотам продольных колебаний определялись повреждения вертикальной штанги. Изучение периодических

и хаотических колебаний трубопровода при гармоническом изменении внутреннего давления проведено в [9–12]. Динамика кластера цилиндров в осевом потоке жидкости теоретически и экспериментально рассмотрена в [13]. В [14] дан обзор литературы и исследована динамическая реакция трубопровода при действии внутреннего ударного давления.

**Постановка задачи.** Рассматриваются пространственные колебания трубопровода и заключенной в нем идеальной несжимаемой жидкости относительно оси, проходящей через опоры, при действии внутреннего ударного давления. Горизонтальная труба закреплена на опорах с помощью сферических шарниров. Одна опора считается неподвижной, а другая – с линейно-упругими элементами, может смещаться по горизонтальной плоскости (рис. 1). Длина трубы  $L$ , ее внутренний радиус  $R_i$  и толщина стенки  $h$ , а суммарная масса однородной трубы и жидкости –  $m$ . Трубу, изогнутую собственным весом и постоянным давлением  $p_0$  заключенной в ней идеальной несжимаемой жидкости, отклоняют на небольшой угол  $\theta_0$  от вертикали и в момент времени  $t=0$  отпускают без начальной угловой скорости. В этот же момент происходит гидравлический удар и в течение его времени действия  $t_e$  внутреннее давление  $p_i$  в трубе становится равным сумме статической  $p_0$  и динамической  $p$  составляющих. Деформации, связанные с выходом оси трубопровода из плоскости изгиба, предполагаются малыми. Поэтому в основе исследования лежит математическая модель изгибно-вращательных движений трубопровода [2]. Учитываются силы гравитации, силы инерции Кориолиса, выталкивающая сила Архимеда, силы сопротивления, пропорциональные первой степени скорости, и силы, связанные с ускорением поперечного движения трубы в окружающей среде.

На рис. 1 изображены прогиб  $W$  элемента трубы длиной  $dx$  и массой  $dm = (m/L)dx$ , его относительные  $V_r$ ,  $a_r$ , переносные  $V_e$ ,  $a_e$ ,  $a_n$  скорости и ускорения;  $a_k$  – ускорение Кориолиса,  $g$  – гравитационное ускорение. К выделенному элементу приложены силы:  $gdm$  – тяжести,  $dA$  – Архимеда,  $dR_r$ ,  $dR_e$  – вязкого сопротивления. Здесь буквами  $d\Phi_r$ ,  $d\Phi_\tau$ ,  $d\Phi_n$  и  $d\Phi_k$  обозначены соответственно относительная, касательная, нормальная и кориолисова силы инерции, а через  $d\Phi_r'$ ,  $d\Phi_\tau'$ ,  $d\Phi_n'$  и  $d\Phi_k'$  – относительная, переносные касательная, нормальная и корио-

лисова силы сопротивления сплошной среды ускоренному движению элемента трубы.

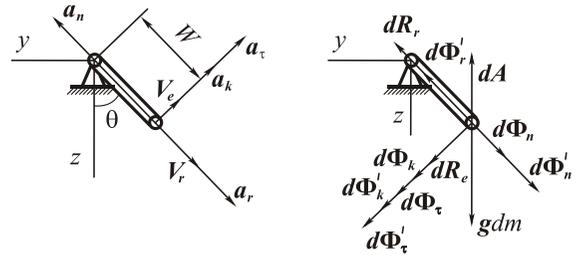
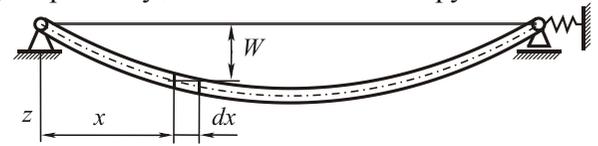


Рис. 1. Расчетная схема трубопровода

Выражения указанных скоростей, ускорений и сил приведены в [11]:

$$V_r = \frac{\partial W}{\partial t}, V_e = W \frac{d\theta}{dt}, a_r = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, a_\tau = W \frac{d^2 \theta}{dt^2},$$

$$a_n = W \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2, a_k = 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial W}{\partial t}, d\Phi_r = a_r dm,$$

$$d\Phi_\tau = a_\tau dm, d\Phi_n = a_n dm, d\Phi_k = a_k dm, \quad (1)$$

$$dA = gdm', d\Phi_r' = a_r dm', d\Phi_\tau' = a_\tau dm',$$

$$d\Phi_n' = a_n dm', d\Phi_k' = a_k dm', k = R_i (R_i + h)^{-1},$$

$$dm' = \pi \rho_c (R_i + h)^2 dx, dR_r = \mu V_r dx,$$

$$dR_e = \mu V_e dx, \mu = 4\pi \mu_0 \left[ \ln k - (k^2 - 1)(k^2 + 1)^{-1} \right]^{-1},$$

где  $\theta$ ,  $R_*$ ,  $\rho_c$  и  $\mu_0$  – угол поворота в произвольный момент времени  $t$ , радиус зоны возмущений, вызываемых движением трубы, плотность и коэффициент динамической вязкости окружающей среды.

Уравнение вращательного движения трубы относительно оси  $x$ , проходящей через опоры, имеет вид

$$-\int_{(m)} W \sin \theta (dmg - dA) - M_u - \int_{(m)} W d\Phi_\tau -$$

$$-\int_{(m)} W d\Phi_\tau' - \int_{(m)} W d\Phi_k - \int_{(m)} W d\Phi_k' - \int_{(m)} W dR_e = 0, \quad (2)$$

$$M_u = J_p \frac{d^2 \theta}{dt^2}, J_p = \frac{\pi \rho_p L [(R_i + h)^4 - R_i^4]}{2}.$$

Здесь  $\rho_p$  – плотность материала трубы.

С учетом указанных выше сил и связи между продольной и окружной деформациями дифференциальное уравнение изгибных колебаний трубы в своей плоскости запишется [14]

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} dm &= -EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} dx - [F_i p_i (1 - \chi) - \\
 &- \alpha \int_0^L \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + d\Phi'_n + d\Phi'_n + \\
 &+ g_1 \cos \theta dm - dR_r - d\Phi'_r, \chi = \frac{2\nu}{1 + \lambda}, \quad (3) \\
 J &= \frac{\pi [(R_i + h)^4 - R_i^4]}{4}, F_i = \pi R_i^2, \\
 g_1 &= g \left( 1 - \frac{m'}{m} \right), m' = \pi \rho_c (R_i + h)^2 L, \\
 \lambda &= \frac{Eh}{CL}, \alpha = \frac{\pi Eh R_i}{(1 + \lambda)L},
 \end{aligned}$$

где  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала трубы,  $C$  – коэффициент продольной жесткости упругих элементов подвижной опоры.

Функция прогиба трубопровода, удовлетворяющая условиям шарнирного закрепления на опорах, принимается в виде

$$W = [W_0 + w(t)] \sin \beta x, \quad \beta = \frac{\pi}{L}. \quad (4)$$

Подставляя функцию (4) и выражения (1) в уравнения (2), (3) и применяя к последнему процедуре Бубнова–Галеркина, получаем

$$\begin{aligned}
 \ddot{\theta} \left[ \frac{m_s}{2} (W_0 + w)^2 + J_p \right] + \frac{\mu}{2} \dot{\theta} (W_0 + w)^2 + \\
 + (W_0 + w) \left[ \frac{2mg_1}{\pi} \sin \theta + m_s \dot{\theta} \dot{w} \right] &= 0, \\
 \ddot{w} + \frac{\mu L}{m_s} \dot{w} + \frac{\beta^4 EJL}{m_s} (W_0 + w) &= \frac{4mg_1}{\pi m_s} \cos \theta + \\
 + (W_0 + w) \dot{\theta}^2 + \varepsilon (p_0 + p) (W_0 + w) - \gamma (W_0 + w)^3, \\
 m_s = m + m', \varepsilon = \frac{\beta^2 L F_i (1 - \chi)}{m_s}, \gamma = \frac{\alpha \beta^4 L^2}{2m_s}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Здесь и далее точки над буквами обозначают производные по времени  $t$ .

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (5) следующие:

$$t = 0, \theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0, w = \dot{w} = 0. \quad (6)$$

Если во втором уравнении системы (5) положить  $\theta = \theta_0, \dot{\theta}(t) \equiv 0, w(t) \equiv 0, p \equiv 0$ , то получим уравнение для определения статической составляющей  $W_0$  прогиба трубопровода:

$$\begin{aligned}
 W_0^3 + \frac{2}{\alpha \beta^2 L} [\beta^2 EJ - F_i p_0 (1 - \chi)] W_0 - \\
 - \frac{8mg_1}{\pi \alpha \beta^4 L^2} \cos \theta_0 = 0. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Из уравнения (7) без первого члена следует, что его решение неограниченно возрастает при значении среднего давления

$$p'_0 = \frac{\pi^2 EJ}{L^2 F_i (1 - \chi)}. \quad (8)$$

Значение давления (8) может быть названо критическим.

Для анализа динамики начального процесса деформирования трубопровода введем в рассмотрение инерционную и инерционно-упругую стадии [14]. Функции углового  $\theta$ , изгибного  $w$  перемещений и их производные  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{w}$  на обеих стадиях предполагаются малыми. Поэтому в системе (5) принимаем  $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1, w/W_0 \ll 1$  и пренебрегаем вкладом членов, содержащих произведение  $\dot{\theta} \dot{w}$  и степень  $\dot{\theta}^2$ . Кроме того, ввиду рассмотрения изгибно-вращательных движений трубопровода в течение непродолжительного времени, в уравнениях (5) отбрасываем члены  $\frac{\mu}{2} \dot{\theta} (W_0 + w)^2$  и  $\frac{\mu L}{m_s} \dot{w}$ , обусловленные действием сил вязкого сопротивления окружающей среды. Тогда уравнения (5) с учетом (7) запишутся

$$\begin{aligned}
 \ddot{\theta} + k_2^2 \theta &= 0, \\
 \ddot{w} + k_1 w + 3\gamma W_0 w^2 + \gamma w^3 &= \varepsilon W_0 p, \\
 k_2^2 = \frac{4mg_1 \delta}{\pi}, \delta = \frac{W_0}{m_s W_0^2 + 2J_p}, \quad (9) \\
 k_1 = \varepsilon \left[ p'_0 \left( 1 + \frac{3\pi h R_i W_0^2}{2J} \right) - p_0 - p \right].
 \end{aligned}$$

Можно отметить главное отличие систем уравнений (5) и (9): оно заключается в отсутствии у последней связи между вращательными и изгибными движениями трубопровода.

Далее рассмотрим случай ступенчатого возрастания давления:

$$p_i = p_0 + p_e \quad (0 \leq t \leq t_e), \quad p_i = p_0 \quad (t > t_e).$$

На инерционной стадии учитываются только ударные и инерционные силы. Продолжительность этой стадии для простоты принимается равной времени  $t_e$  удара. Таким образом, на этой стадии вместо системы (9) имеем

$$\ddot{\theta} = 0, \quad \ddot{w} = \varepsilon W_0 p_e. \quad (10)$$

Решение системы (10) с начальными условиями (6) имеет известный вид

$$\theta = \theta_0, \quad w = \frac{\varepsilon W_0 p_e t^2}{2}, \quad (0 \leq t \leq t_e). \quad (11)$$

То есть за короткое время удара угол  $\theta$  остается равным начальному углу  $\theta_0$  поворота трубы, а изгибное перемещение изменяется прямо пропорционально квадрату времени.

Инерционно-упругая стадия изгибно-вращательных движений трубопровода является продолжением ее инерционной стадии. На данной стадии действие ударной нагрузки прекращается и система (9) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + k_2^2 \theta &= 0, \\ \dot{w} + k_0 w + 3\gamma W_0 w^2 + \gamma w^3 &= 0, \\ k_0 &= \varepsilon \left[ p_0' \left( 1 + \frac{3\pi h R_i W_0^2}{2J} \right) - p_0 \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь и далее точки над буквами обозначают производные по времени  $\tau = t - t_e$ .

В качестве начальных условий на инерционно-упругой стадии используются значения перемещений и скоростей в конце удара, полученные из решения задачи на инерционной стадии. Таким образом, с учетом решения (10) начальные условия для системы (12) запишутся

$$\tau=0, \theta=\theta_0, \dot{\theta}=0, w = \frac{\varepsilon W_0 p_e t_e^2}{2}, \dot{w} = \varepsilon W_0 p_e t_e. \quad (13)$$

Из первого уравнения системы (12), согласно условиям (13), следует, что в данном приближении труба совершает вращательные гармонические колебания с амплитудой  $\theta_0$  и круговой частотой  $k_2$ :

$$\theta = \theta_0 \cos k_2 \tau. \quad (14)$$

Приближенное аналитическое решение второго нелинейного уравнения системы (12) для случая свободных изгибных колебаний ( $k_0 > 0$ ) будем определять методом гармонического баланса [15]. С этой целью функция  $w$  представляется в виде суммы

$$w = A \cos \omega \tau + B \sin \omega \tau. \quad (15)$$

Здесь  $A$ ,  $B$  и  $\omega$  – постоянные интегрирования и круговая частота свободных изгибных колебаний, которая зависит от их амплитуды.

Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  находятся из начальных условий (13):

$$A = \frac{\varepsilon W_0 p_e t_e^2}{2}, \quad B = \frac{\varepsilon W_0 p_e t_e}{\omega}. \quad (16)$$

Для определения круговой частоты  $\omega$ , согласно указанному методу, функцию (15) и ее вторую производную по времени подставляем во второе уравнение системы (12). Затем обе части получившегося уравнения последовательно умножаем на функции  $\cos \omega \tau$ ,  $\sin \omega \tau$

и интегрируем от 0 до  $\frac{2\pi}{\omega}$ . В результате получаем

$$\omega^2 = k_0 + \frac{3}{4} \gamma \varepsilon^2 W_0^2 p_e^2 t_e^2 \left( \frac{t_e^2}{4} + \frac{1}{\omega^2} \right). \quad (17)$$

Отсюда удвоенное значение квадрата искомой частоты будет определяться по формуле

$$2\omega^2 = k_0 + d \pm \left[ (k_0 + d)^2 + q \right]^{1/2}, \quad (18)$$

$$d = \frac{q t_e^2}{16}, \quad q = 3\gamma \varepsilon^2 W_0^2 p_e^2 t_e^2,$$

где значения  $k_0, \gamma, \varepsilon$  и  $W_0$  через входные параметры вычисляются по выражениям, приведенным в (3), (5), (7), (12).

В заключение приведем также решение линеаризованного второго уравнения системы (12):

$$w = A \left( \cos k_{10} \tau + \frac{2}{k_{10} t_e} \sin k_{10} \tau \right), \quad k_{10}^2 = k_0, \quad (19)$$

где  $k_{10}$  – круговая частота свободных линейных изгибных колебаний трубопровода.

**Результаты вычислений.** Вычисления проводились для стального трубопровода 104×2, окруженного водной средой. Длина, внутренний радиус и толщина стенки трубопровода:  $L = 7.0$  м,  $R_i = 0.05$  м и  $h = 0.002$  м. Модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала трубы:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0.3$  и  $\rho_p = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Плотности заключенной в трубопроводе жидкости, окружающей его среды и ее коэффициент динамической вязкости:  $\rho_0 = 800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_e = 800$  кг/м<sup>3</sup> и  $\mu_0 = 0.00105$  Па·с. Радиус зоны возмущений, вызываемых движением трубы:  $R_* = 2(R_i + h)$ . Продольная жесткость упругих элементов креплений подвижной опоры:  $C = 16.0$  МПа. Начальный угол отклонения плоскости изгиба трубопровода от вертикали равен  $\theta_0 = 0.2$  рад. Среднее внутреннее давление имело одно значение:  $p_0 = 3.0$  МПа. При этом приближенное значение амплитуды  $W_0$  статической составляющей прогиба средней точки пролета трубы, определяемое из численного решения алгебраического уравнения (7), составило 0.0199 м. Задавались три значения динамической составляющей внутреннего давления:  $p_e = 5.0, 10.0$  и  $15.0$  МПа. Согласно [14], продолжительность  $t_e$  действия ударной нагрузки принималась равной 0.0055 с.

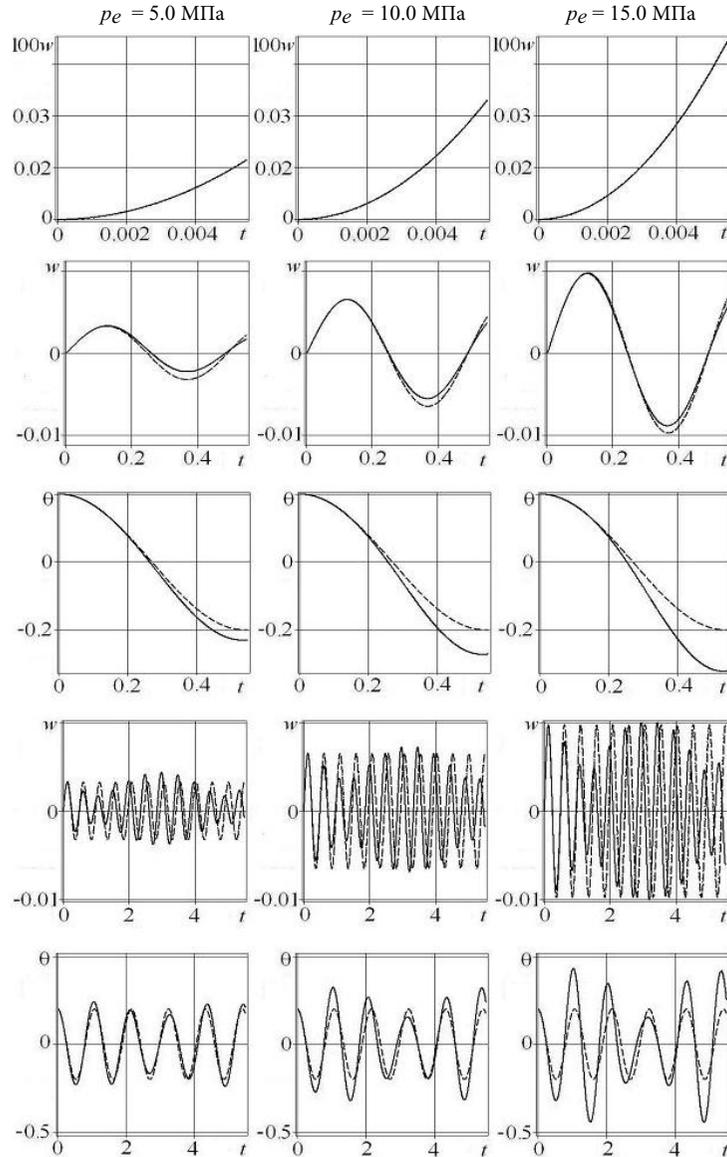


Рис. 2. Зависимости динамической составляющей прогиба  $w$ ,  $\dot{w}$ , и угла  $\theta$ , рад, поворота трубы от времени  $t$ . Сплошные линии – результат численного интегрирования нелинейных уравнений движения (5), штриховые – аналитического решения (19) линейных уравнений движения, точечные – аналитического решения (15)–(18) нелинейного уравнения динамического изгиба трубы

Результаты вычислений приведены на рис. 2 в виде графических зависимостей амплитуды  $w$  динамической составляющей прогиба средней точки пролета и угла  $\theta$  поворота трубопровода от времени  $t$ . На рис. 2 разные столбцы относятся к разным значениям динамической составляющей внутреннего давления  $p_e$ , которые указаны сверху. Первая строка графиков относится к зависимости  $w(t)$  на инерционной стадии, а последующие строки – к  $w(t)$  и  $\theta(t)$  при  $t > t_e$ . Переменные на графиках измеряются: время  $t$  – в секундах, динамическая составляющая  $w$  – в метрах, угол  $\theta$  – в радианах. На графиках сплошными линиями нанесены результаты вы-

числений, полученные численным интегрированием задачи Коши (5), (6) методом Рунге–Кутты. Штриховыми и точечными линиями обозначены графические зависимости аналитических решений (14), (19) и (15)–(18) соответственно линейных уравнений движения и нелинейного уравнения динамического изгиба трубопровода. Из первой строки графиков рис. 2 видно, что на инерционной стадии динамического процесса увеличение амплитуды динамической составляющей внутреннего давления приводит к значительному увеличению амплитуд перемещения и скорости средней точки пролета трубы. Поскольку с увеличением амплитуды динамиче-

ской составляющей внутреннего давления увеличивается и ускорение (10) средней точки пролета. Вместе с тем особенность инерционной стадии состоит в том, что значения изгибных перемещений средней точки пролета близки к нулю, а ее скорости имеют конечные величины [14]. Этот факт подтверждается также результатами численного интегрирования нелинейной системы уравнений (5) с начальными условиями (6) в настоящей работе. В частности, в момент  $t_e$  окончания удара имеем:  $w = 1.15 \cdot 10^{-4}$  м и  $\dot{w} = 0.0417$  м/с ( $p_e = 5.0$  МПа),  $w = 2.3 \cdot 10^{-4}$  м и  $\dot{w} = 0.0836$  м/с ( $p_e = 10.0$  МПа),  $w = 3.45 \cdot 10^{-4}$  м и  $\dot{w} = 0.126$  м/с ( $p_e = 15.0$  МПа). Такие же значения следуют из формул (11). Можно видеть также, что на инерционной стадии процесса при всех трех значениях динамической части внутреннего давления в трубе сплошные и штриховые линии на графиках практически сливаются в одну кривую. Поэтому на инерционной стадии динамики трубопровода можно пренебрегать неударными силами.

Инерционно-упругая стадия изгибно-вращательных движений трубопровода начинается в момент времени, когда заканчивается время инерционной стадии. На инерционно-упругой стадии перестает действовать ударная нагрузка и дальнейшее движение трубопровода главным образом зависит от величин скоростей, полученных его точками в конце инерционной стадии, сил упругости, гравитации, Архимеда и сопротивления сплошной среды.

Графические зависимости динамической составляющей прогиба  $w$  и угла  $\theta$  поворота от времени представлены соответственно на второй, третьей ( $0.55 \geq t \geq 0$ ) и на четвертой, пятой ( $5.5 \geq t \geq 0$ ) строках рис. 2. Из приведенных графиков видно, что при принятых значениях основных параметров изгибные и вращательные движения трубопровода совершаются в колебательном режиме. Можно видеть также, что свободные изгибные колебания трубопровода происходят с большей частотой, чем его свободные вращательные колебания. На графиках второй и четвертой строк видно, что в указанные отрезки времени с увеличением амплитуды динамической части внутреннего давления происходит также увеличение амплитуды динамической составляющей прогиба. Кроме того, вторая и последующие строки графиков свидетельствуют о том, что значения собственных частот изгибных и вращательных колебаний трубы не зависят от величины ам-

плитуды динамической части внутреннего давления. Из графиков видно, что от начала инерционно-упругой стадии до момента времени 0.127 с изгибные перемещения увеличиваются, а затем до времени 0.367 с уменьшаются. Такая динамика обусловлена тем, что в начале инерционно-упругой стадии изгибные деформации малы и поэтому малы упругие силы. С увеличением изгибных деформаций растут также упругие силы. Значительная часть кинетической энергии расходуется на работу гравитационных, возросших упругих сил и сил вязкого сопротивления сплошной среды. Поэтому в отрезке времени 0.127÷0.367 с прогибы трубы уменьшаются. Далее процесс повторяется. На графиках второй и четвертой строк можно видеть также, что значения изгибных перемещений, вычисленные с использованием линейного решения (19) совпадают со значениями, полученными из нелинейного решения (15)–(18). То есть при относительно небольших значениях изгибных перемещений вполне пригодным может быть применение линейного решения.

Графические зависимости динамической составляющей прогиба на ранней ( $0.55 \geq t \geq 0$ ) стадии свободных упругих колебаний даны третьей строкой графиков рис. 2. На этих графиках также видно, что при принятых величинах амплитуд динамической составляющей внутреннего давления от начала инерционно-упругой стадии до времени  $t = 0.127$  с штриховая и сплошная линии совпадают. В течение этого времени угол  $\theta$  от значения 0.2 рад уменьшается приблизительно до значения 0.0514 рад. Далее сплошные линии, располагаясь ниже, расходятся со штриховыми линиями. В конце рассматриваемого отрезка времени плоскость изгиба трубопровода поворачивается в сторону, противоположную начальному отклонению, по абсолютной величине на больший, чем 0.2 рад угол. Такой результат можно объяснить тем, что в отрезке времени 0.255÷0.50 с динамическая составляющая прогиба принимает отрицательные значения, что приводит к уменьшению величины полного прогиба трубопровода ( $W = W_0 + w$ ). Поэтому, согласно теореме об изменении момента количества движения механической системы относительно горизонтальной оси, проходящей через опоры, в конце отмеченного отрезка времени трубопровод поворачивается в сторону, противоположную начальному отклонению, на больший угол, чем 0.2 рад.

Развитие изгибных и вращательных колебаний трубопровода на инерционно-упругой стадии в отрезе времени  $0 \div 5.50$  с представлено четвертой и пятой строками графиков рис. 2. Из графиков видно, что свободные нелинейные изгибные и вращательные колебания трубопровода имеют вид биений. Последние обусловлены взаимодействием между изгибными и вращательными колебаниями трубы. Из Фурье-анализа, приведенного в [11], следует, что изгибные нелинейные колебания трубопровода складываются из колебаний с двумя частотами: первой собственной частотой изгибных колебаний и удвоенной первой собственной частотой вращательных колебаний трубопровода. При сближении частот этих колебаний происходит формирование биений. Например, в нашем случае круговые частоты собственных изгибных и вращательных колебаний имеют значения:  $\omega = 12.9$  и  $k_2 = 5.80$  рад/с.

Из результатов вычислений также можно отметить, что в рассмотренные непродолжительные отрезки времени силы вязкого сопротивления окружающей водной среды оказывают незначительное влияние на изгибно-вращательные движения трубопровода.

**Заключение.** Изложенный выше анализ позволяет сделать следующие выводы.

1. На инерционной стадии динамики трубопровода можно пренебрегать неударными силами.

2. На инерционной стадии динамического процесса с увеличением амплитуды динамической части внутреннего давления происходит значительное увеличение перемещения и скорости средней точки пролета трубы.

3. Движение трубопровода на инерционно-упругой стадии главным образом зависит от величин скоростей, полученных его точками в конце инерционной стадии.

4. С увеличением амплитуды динамической части внутреннего давления на инерционно-упругой стадии процесса также происходит увеличение амплитуды динамической составляющей прогиба.

5. На инерционно-упругой стадии свободные нелинейные изгибные и вращательные колебания трубы принимают вид биений.

6. При принятых в работе значениях основных параметров на инерционно-упругой стадии вполне пригодным может быть применение решения линейного уравнения изгиба трубопровода.

7. На инерционно-упругой стадии в отдельные моменты времени труба может поворачиваться на больший угол, чем начальный угол поворота. Увеличение угла поворота трубопровода становится больше с увеличением амплитуды динамической части внутреннего давления.

8. В рассмотренные непродолжительные отрезки времени силы вязкого сопротивления окружающей водной среды оказывают незначительное влияние на изгибно-вращательные движения трубопровода.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты №17-41-020400\_p\_a, № 18-01-00150\_a).*

### Литература

1. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
2. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.
3. Ilgamov M.A. Static problems of hydroelasticity. Moscow: Fizmatlit, 1998. 208 p.
4. Tang D.M., Ilgamov M.A., Dowell E.H. Buckling and post-buckling behavior of a pipe subjected to internal pressure // J. of Appl. Mech. 1995. Vol. 62, № 3. P. 595–600.
5. Ibrahim R.A. Mechanics of pipes conveying fluids // ASME J. of Pressure Vessel Technology. 2010. Vol. 132. P. 1–32.
6. Нестеров С.В., Акуленко Л.Д., Коровина Л.И. Поперечные колебания трубопроводов с равномерно движущейся жидкостью // Докл. РАН. 2009. Т. 427, № 6. С. 781–784.
7. Миронов М.А., Пятаков П.А., Андреев А.А. Вынужденные колебания трубы с потоком жидкости // Акустический журнал. 2010. Т. 56, № 5. С. 684–692.
8. Ильгамов М.А. Диагностика повреждений вертикальной штанги // Труды Института механики УНЦ РАН. 2007. Вып. 5. С. 201–211.
9. Ильгамов М.А., Мишин В.Н. Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 181–192.
10. Panda L.N., Kar R.C. Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with combination, principal parametric and internal resonances // J. of Sound and Vibration. 2008. Vol. 309. P. 375–406.
11. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 3–13.
12. Шакирьянов М.М. Пространственные хаотические колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // Известия Уфимского научного центра РАН. 2016. № 4. С. 35–47.

13. Païdoussis M.P.. The dynamics of clusters of flexible cylinders in axial flow: theory and experiments // *J. of Sound and Vibration*. 1979. Vol. 65. P. 391–417.

14. Илгамов М.А. Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // *Изв. РАН. МТТ*. 2017. № 6. С. 83–96.

15. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 432 с.

#### References

1. Svetlitsky V.A. Mechanics of pipes and hoses. Moscow, Mashinostroenie. 1982. 280 p.

2. Ilgamov M.A. Oscillations of elastic shells containing liquid and gas. Moscow, Nauka, 1969. 180 p.

3. Ilgamov M.A. Static problems of hydroelasticity. Moscow: Fizmatlit. 1998. 208 p.

4. Tang D.M., Ilgamov M.A., Dowell E.H. Buckling and post-buckling behavior of a pipe subjected to internal pressure. *J. of Appl. Mech.*, 1995, vol. 62, no. 3, pp. 595–600.

5. Ibrahim R.A. Mechanics of pipes conveying fluids. *ASME J. of Pressure Vessel Technology*, 2010, vol. 132, pp. 1–32.

6. Nesterov S.V., Akulenko L.D., Korovina L.I. Transverse oscillations of a pipeline with uniformly moving fluid. *Doklady Physics*, 2009, vol. 54, no. 8, pp. 402–405.

7. Mironov M.A., Pyatakov P.A., Andreev A.A. Forced oscillations of a pipe with fluid flow.

*Akusticheskiy zhurnal*, 2010, vol. 56, no. 5, pp. 684–692.

8. Ilgamov M.A. Damage detection of a vertical bar. *Trudy Instituta mekhaniki Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN*. Issue 5. Ufa, 2007, pp. 201–211.

9. Ilgamov M.A., Mishin V.N. The transverse oscillations of a pipe under the action of running waves in the fluid. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 1997, no. 1, pp. 181–192.

10. Panda L.N., Kar R.C. Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with combination, principal parametric and internal resonances. *J. of Sound and Vibration*, 2008, vol. 309, pp. 375–406.

11. Ganiev R.F., Ilgamov M.A., Khakimov A.G., Shakiryaynov M.M. Spatial oscillations of a pipeline in the continuous medium under the impact of alternating internal pressure. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2016, no. 6, pp. 3–13.

12. Shakiryaynov M.M. Spatial chaotic vibrations of a pipeline in the continuous medium under the impact of alternating internal pressure. *Izvestiya Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN*, 2016, no. 4, pp. 35–47.

13. Païdoussis M.P. The dynamics of clusters of flexible cylinders in axial flow: Theory and experiments. *J. of Sound and Vibration*, 1979, vol. 65, pp. 391–417.

14. Ilgamov M.A. Dynamics of a pipeline under the action of internal shock pressure. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2017, no. 6, pp. 83–96.

15. Ganiev R.F., Kononenko V.O. Oscillations of solid bodies. Moscow, Nauka, 1976. 432 p.

## SPATIAL OSCILLATIONS OF THE PIPELINE IN THE CONTINUOUS MEDIUM UNDER THE ACTION OF INTERNAL SHOCK PRESSURE

© M.M. Shakiryaynov

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Centre  
of the Russian Academy of Sciences,  
71, prospekt Oktybrya, 450054, Ufa, Russian Federation

Spatial oscillations of the pipeline and the ideal incompressible fluid enclosed in it relative to the axis passing through the supports are considered under the action of an internal shock pressure. The pipeline is surrounded by a viscous incompressible continuous medium. One of the supports is fixed, and the other is attached to linear elastic elements and can be displaced along the horizontal plane. The tube, curved by its own weight and constant pressure of the liquid contained therein, is deflected a small angle from the vertical plane and at some instant of time is released without the initial angular velocity. At the same time, a hydraulic shock occurs and during its operating time the internal pressure in the pipe becomes equal to the sum of the static and dynamic components. The deformations associated with the exit of the pipeline axis from the bending plane are assumed to be small. Therefore, the study is based on a mathematical model of Flexural-rotational movements of the pipeline. The interaction of internal pressure and changes in the curvature of the axial line, as well as the circumferential deformation of the pipe, are taken into account. In studying the flexural-rotational vibrations of the pipeline, the forces of gravity, the inertial forces of Coriolis, the buoyancy force of Archimedes, the forces of viscous resistance and the forces associated with the acceleration of the transverse movement of the pipe in the environment are also taken into account. Vibrational movements of the pipeline are described by a system of two nonlinear partial differential equations. Approximating the function of the deflection of the pipeline along the first basic form and applying the Bubnov–Galerkin procedure, this system reduces to two nonlinear ordinary differential equations with respect to the angle of rotation and the deflection of the mid-point of the span of the pipe from time. The Cauchy problem with zero initial conditions is solved by a numerical Runge-Kutta method. To analyze the dynamics of the initial process of pipeline deformation, inertial and inertial-elastic stages are introduced into consideration in time. At the inertial stage only shock and inertial forces are taken into account. The inertial-elastic stage of the flexural-rotational movements of the pipeline is a continuation of its inertial stage. At the inertial-elastic stage, the action of the shock load ceases. Analytical solutions were obtained at both stages of pipeline deformation. Calculations were carried out for the case of oscillations of a steel pipe in an aqueous medium with a stepwise change in the dynamic part of the internal pressure. The analysis of the results of calculations is given.

Key words: pipeline, spatial oscillations, internal shock pressure, stages of deformation.