ФИЗИКА

УДК 517.589, 539.192
DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-3-17-22

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ДВУХЧАСТИЧНЫХ Т-МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ ОБЛАСТЯХ СПЕКТРОВ

© Р.Ф. Ахметьянов, Е.С. Шиховцева

Как известно, основной проблемой при решении уравнения Фаддеева является выбор аппроксимации потенциалов взаимодействия, при котором Т-матричные элементы рассеяния приобретали бы сепарабельный вид. Однако даже в таком случае решение уравнения Фаддеева не всегда становится практичным ввиду того, что входящие Т-матричные элементы в интегральные уравнения уже не факторизуются. В данной работе содержится вывод представления двухчастичных Т-матричных элементов рассеяния для кулоновского взаимодействия по специальным базисам без разложения по парциальным волнам, в котором выполняются теоремы сложения. Исходя из этого интегральные уравнения Фаддеева приводятся к факторизованному виду, что позволяет получить более точные решения по сравнению с ранее известными методами для трехчастичных систем с кулоновским взаимодействием. Результаты работы применимы не только в задаче трех тел при решении уравнения Фаддеева для трехчастичных систем, но и к системам, состоящим из произвольного количества частиц, уравнения которых относятся к классу уравнений Якубовского – более общему, чем уравнения Фаддеева.

Ключевые слова: кулоновские системы, асимптотическое поведение.

Введение. Для анализа процессов столкновений и реакций были развиты алгебраические подходы, основанные на представлении гамильтониана в полном базисе квадратично интегрируемых функций. Одним из таких подходов, применительно к кулоновским системам, является метод J-матрицы [1, 2], где в качестве базиса квадратично интегрируемых функций берутся лагерровские функции в конфигурационном пространстве. В работе [3] в качестве базиса квадратично интегрируемых функций мы брали четырехмерные гиперсферические функции в импульсном пространстве, определенные в [4, 5], которые основаны на разложении кулоновского потенциала. Так, Т-матрица [3, (1.1)] в представлении этого базиса, представляются в виде [3, (2.5)], а его матричные элементы выражаются как [3, (2.8)], которые можно представить в виде произведения отдельных матриц [3, (2.14)]

$$\boldsymbol{\tau} = \sigma \mathbf{B}^T \mathbf{B}(\mathbf{A} + \sigma \mathbf{E}). \qquad (1)$$

В этой работе, в отличии от [3], мы рассмотрим конечный порядок этих матриц размера ($N \times N$). Случай бесконечно размерных матриц можно рассмотреть как предельный случай при $N \to \infty$, который будет рассмотрен в конце. Здесь и далее первый индекс через точку запятую указывает порядок матрицы (вектора), или для вспомогательных значений указывает, что они принадлежат к матрицам того порядка, а вторые индексы (если указаны и есть) – его компоненты.

Как и в [3], матричные элементы $\mathbf{A}$ в (1) для конечного порядка можно представить в виде [3, (2.11)] J-матриц как

$$\begin{aligned} A_{N;n_1,n_2}(r) &= \lambda_{n_1}(r)\delta_{n_1,n_2} + \\ &+ \phi_{n_1}\phi_{n_2}(\delta_{n_1+1,n_2} + \delta_{n_1-1,n_2}), \end{aligned} \qquad (2a)$$

где

$$\lambda_n(r) = \lambda_n - r;\ \lambda_n = \frac{y-1}{2\rho}(n+l+1) \qquad (2b)$$

можно выразить в виде произведения [3, (2.12)]

$$\mathbf{A}_N(r) = \mathbf{b}_N(r)\mathbf{b}_N^T(r), \qquad (3)$$

где элементы $\mathbf{b}_N(r)$ представляются в виде

$$b_{N;n_1,n_2}(r) = \phi_{n_1}\sqrt{\beta_{n_2}(r)}\,\delta_{n_1+1,n_2} + \frac{\phi_{n_1}}{\sqrt{\beta_{n_2}(r)}}\delta_{n_1,n_2}$$

АХМЕТЬЯНОВ Роберт Фанилович, Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН,
e-mail: robertu@mail.ru
ШИХОВЦЕВА Елена Сергеевна – д.ф.-м.н., Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН,
e-mail: elshik@anrb.ru

Представление матрицы (2) в виде произведения вида (3) справедливо, если $\beta_n(r)$ удовлетворяет условиями

$$\phi_k^2\left(\beta_{k+1}(r)+\frac{1}{\beta_k(r)}\right)=\lambda_k(r),k=0,1,\ldots,N-2 \qquad (4)$$
$$\frac{\phi_{N-1}^2}{\beta_{N-1}(r)}=\lambda_{N-1}(r)$$

Очевидно, что определители выражаются в виде

$$\det\mathbf{b}_N(r)=\prod_{k=0}^{N-1}\frac{\phi_k}{\sqrt{\beta_k(r)}} \qquad (5)$$
$$\det\mathbf{A}_N(r)=\prod_{k=0}^{N-1}\frac{\phi_k^2}{\beta_k(r)}.$$

Обратная матрица $\mathbf{A}_N(r)$ (2) определяется из (3) в виде

$$\mathbf{A}_N^{-1}(r)=\mathbf{B}_N^T(r)\mathbf{B}_N(r) \qquad (6)$$

где $\mathbf{B}_N(r)=\mathbf{b}_N^{-1}(r)$

$$B_{N;n,m}(r)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n+m}}{\phi_m\sqrt{\beta_n(r)}}\displaystyle\prod_{i=n}^{m}\beta_i(r), & m\ge n\\ 0, & m<n\end{cases}$$

Из (6) получим

$$A_{N;n,m}^{-1}(r)=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n+m}}{\phi_n\phi_m}\left(1+\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\prod_{j=0}^{i}\beta_{m-1-j}\beta_{m-j}\right)\displaystyle\prod_{k=m}^{n}\beta_k, & n\geqslant m\\ \text{то же при перестановки } n\leftrightarrow m, & n\leqslant m\end{cases} \qquad (7)$$

Естественно из (5)

$$\det\mathbf{B}_N(r)=\prod_{k=0}^{N-1}\frac{\sqrt{\beta_k(r)}}{\phi_k} \qquad (8)$$
$$\det\mathbf{A}_N^{-1}(r)=\prod_{k=0}^{N-1}\frac{\beta_k(r)}{\phi_k^2}$$

Некоторые представления $\beta_n(r)$ для конечномерных матриц. В представлении $\beta_n(r)$ вида

$$\beta_n(r)=\frac{Q_{N;n}(r)}{Q_{N;n-1}(r)}$$

из (4) $Q_{N;n}(r)$ удовлетворяют рекуррентным соотношением с конечным значением

$$Q_{N;n+1}(r)+Q_{N;n-1}(r)=\frac{\lambda_n(r)}{\phi_n^2}Q_{N;n}(r)$$
$$n=0,1,2,\ldots,N-2 \qquad (9)$$
$$Q_{N;N-1}(r)=\frac{\phi_{N-1}^2Q_{N;N-2}(r)}{\lambda_{N-1}(r)}$$

матричные элементы (7) будут иметь следующий вид

$$A_{N;n,m}^{-1}(r)=$$
$$=\begin{cases}(-1)^{n+m}\dfrac{Q_{N;n}Q_{N;m}}{\phi_n\phi_m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{Q_{N;k}Q_{N;k-1}}, & n\geqslant m\\ \text{то же при перестановки } n\leftrightarrow m, & n<m\end{cases} \qquad (10)$$

а определитель из (8)

$$\det\mathbf{A}_N(r)=\frac{Q_{N;-1}(r)}{Q_{N;N-1}(r)}\prod_{k=0}^{N-1}\phi_k^2 \qquad (11)$$

здесь N – размерность матрицы (10), в котором для бесконечномерной устремляем к бесконечности.

К примеру рассмотрим матрицу $\mathbf{S}_N$ порядка N следующего вида

$$\mathbf{S}_N(r)=\left(\mathbf{E}-r\mathbf{A}^{-1}(0)\right)_N \qquad (12)$$

и вектор $\mathbf{V}_N$ с элементами

$$\mathbf{V}_N=(V_{N;0},V_{N;1},V_{N;2},\ldots,V_{N;N-1})$$
$$V_{N;n}=P_n,\ n=0,1,2,\ldots,N-2$$
$$V_{N;N-1}=\frac{\phi_{N-1}^2Q_{N;N-2}(0)}{rQ_{N;N-1}(0)}P_{N-1}+ \qquad (13)$$
$$+\frac{\phi_{N-1}\phi_{N-2}}{r}P_{N-2}=$$
$$=\frac{\lambda_{N-1}(0)}{r}P_{N-1}+\frac{\phi_{N-1}\phi_{N-2}}{r}P_{N-2},$$

где

$$P_n=(-1)^n\frac{\phi_n\phi_0}{\prod_{k=0}^{n}\phi_k^2}\det\mathbf{A}_n(r)=(-1)^n\frac{\phi_0Q_{n;-1}(r)}{\phi_nQ_{n;n-1}(r)} \qquad (14)$$

Вектор, образованный произведением (12) и (13), будет

$$\mathbf{S}_N\mathbf{V}_N=\left(0,\ldots,\frac{(-1)^{N-1}\phi_{N-1}\phi_0Q_{N;-1}(0)}{r\,Q_{N;N-1}(0)}\det\mathbf{S}_N\right) \qquad (15)$$

Очевидно, что при всех тех значениях r_n, в которых

$$\det\mathbf{S}_N(r_n)=0,\quad n=0,1,\ldots,N-1 \qquad (16)$$

вектор (13) $\mathbf{V}_N$ будет собственным вектором матрицы $\mathbf{A}_N^{-1}(0)$

$$r_n\mathbf{A}_N^{-1}(0)\mathbf{V}_N=\mathbf{V}_N$$

с собственным значением r_n. Отметим также интересное нужное нам соотношение

$$\det \mathbf{S}_N(r) = \det \mathbf{A}_N(r) \det \mathbf{A}_N^{-1}(0) = = \frac{Q_{N;-1}(r) Q_{N;N-1}(0)}{Q_{N;N-1}(r) Q_{N;-1}(0)} \tag{17}$$

где использовано (11).

Определение $Q_{N;k}(r)$ **и определителя (11)**. Если представить $Q_{N,k}(r)$ в виде

$$Q_{N,k}(r) = (-1)^k \left(\frac{k+3}{2}\right)_l S_{N-k-1,k+1}, \tag{18a}$$

то из рекуррентного соотношения (9) можно получить производящую функцию для $S_{n,p}$ в виде

$$\left(1-\frac{\omega}{\omega_2^*}\right)^{\alpha_1} \left(1-\frac{\omega}{\omega_2}\right)^{\alpha_1^*} \times \times \frac{p}{\omega^p} \int_0^\omega d\xi\, \xi^p \left(1-\frac{\xi}{\omega_2^*}\right)^{-\alpha_1-1} \left(1-\frac{\xi}{\omega_2}\right)^{-\alpha_1^*-1} = = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n S_{n,p}$$

с параметрами

$$\alpha_1 = -l-1+i\frac{\rho r}{\sqrt{y}} \tag{18b}$$

$$\omega_2 = \frac{y-1}{y+1} - i\frac{2\sqrt{y}}{y+1} = \frac{i\sqrt{y}+1}{i\sqrt{y}-1} \tag{18c}$$

где $S_{n,p}$ есть обобщенный многочлен Поллачека [6] (краткое изложение в [7, Гл.10, п.10.21])

$$S_{n,p} = \frac{(p-\alpha_1^*)_n}{\omega_2^n (\mathrm{p}+1)_n} {}_2F_1\left[\begin{matrix} -p-n & -\alpha_1 \\ 1+\alpha_1^*-p-n & \end{matrix}\middle|\omega_2^2\right] \times$$
$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix} p & \alpha_1+1 \\ p-\alpha_1^* & \end{matrix}\middle|\omega_2^2\right] - \frac{\omega_2^{n+2} p(-\alpha_1-\alpha_1^*+p-1)_{n+1}}{(p-1-\alpha_1^*)_{n+2}} \times$$
$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix} 1-p & -\alpha_1 \\ \alpha_1^*+2-p & \end{matrix}\middle|\omega_2^2\right] {}_2F_1\left[\begin{matrix} p+n+1 & \alpha_1+1 \\ p+n+1-\alpha_1^* & \end{matrix}\middle|\omega_2^2\right]$$

являющимся другой формой записи выражения [7, Гл.10, 10.21(15)] для целочисленных параметров l. Для $Q_{N;N-1}(r)$ из (18a) можно показать, что при любых его параметрах

$$Q_{N;N-1}(r) = (-1)^{N-1}\left(\frac{N}{2}+1\right)_l = = (-1)^{N-1} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+l+1\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} \tag{19}$$

Тогда из (17) получим

$$\det \mathbf{S}_N(r) = \frac{Q_{N;-1}(r)}{Q_{N;-1}(0)} \tag{20}$$

где из (18a)

$$Q_{N;-1}(r) = -\frac{l!\left(-\alpha_1^*\right)_N}{\omega_2^N N!} {}_2F_1\left[\begin{matrix} -N & -\alpha_1 \\ 1+\alpha_1^*-N & \end{matrix}\middle|\omega_2^2\right] =$$
$$= -\frac{l!\left(l+1+i\frac{\rho r}{\sqrt{y}}\right)_N}{\omega_2^N N!} {}_2F_1\left[\begin{matrix} -N & l+1-i\frac{\rho r}{\sqrt{y}} \\ -l-N-i\frac{\rho r}{\sqrt{y}} & \end{matrix}\middle|\omega_2^2\right] \tag{21}$$

Очевидно, что при $r=0$ из [7, Гл.10.9] также следует, что

$$Q_{N;-1}(0) = -\frac{l!(l+1)_N}{\omega_2^N N!} {}_2F_1\left[\begin{matrix} -N & l+1 \\ -l-N & \end{matrix}\middle|\omega_2^2\right] = = -l!\,C_N^{l+1}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)$$

где C_N^{l+1} -- многочлен Гегенбауэра.

Из [3, (2.10)] получим

$$\prod_{k=0}^{N-1} \phi_k^2 = \left(-\frac{y+1}{2\rho}\right)^N \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+2}{2}+l\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(l+1)}$$

Объединяя это выражение с (21), (19) в (11), получим

$$\det \mathbf{A}_N(r) = -\left(\frac{y+1}{4\rho}\right)^N \frac{N!}{l!} Q_{N;-1}(r) = = \left(\frac{y+1}{4\rho\omega_2}\right)^N \left(-\alpha_1^*\right)_N {}_2F_1\left[\begin{matrix} -N & -\alpha_1 \\ 1+\alpha_1^*-N & \end{matrix}\middle|\omega_2^2\right] \tag{22}$$

Из (17) и (19) получим для последнего элемента вектора (15) в следующем виде

$$\frac{(-1)^{N-1}\phi_{N-1}\phi_0 Q_{N;-1}(0)}{r\,Q_{N;N-1}(0)} \det \mathbf{S}_N(r) = = -\frac{y+1}{4\rho}\frac{N!}{l!}\sqrt{\frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(N)\Gamma(2l+N+1)}}\, Q_{N;-1}(r)$$

а элементы P_n в (14) будут иметь вид

$$P_n = -\frac{n!}{l!}\sqrt{\frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2l+n+2)}}\, Q_{n;-1}(r) = = \left(\frac{4\rho}{y+1}\right)^n \sqrt{\frac{(2l+1)!}{n!(2l+n+1)!}} \det \mathbf{A}_n(r) \tag{23}$$

таким образом, для определения собственных значений и векторов (12) достаточно знать (21) (или (22)).

Выражение (22) можно получить и другим способом. Так, из (2) получим рекуррентное соотношение для определителей вида

$$\det \mathbf{A}_n(r) = \lambda_{n-1} \det \mathbf{A}_{n-1}(r) - \left(\phi_{n-1}\phi_{n-2}\right)^2 \det \mathbf{A}_{n-2}(r)$$
$$n = 1, 2, \ldots, N$$

с начальными условиями

$$\det \mathbf{A}_{-1}(r) = 0, \quad \det \mathbf{A}_0(r) = 1 \qquad (24)$$

Используя λ_n из (2b), а также ϕ_n из [3, (2.10)], в котором мы имеем

$$\left(\phi_{n-1}\phi_{n-2}\right)^2 = \left(\frac{y+1}{4\rho}\right)^2 (n-1)(n+2l)$$

и представляя определитель $\det \mathbf{A}_n(r)$ как

$$\det \mathbf{A}_n(r) = \left(\frac{y+1}{4\rho}\right)^2 \Gamma(n+1) D_n(r) \qquad (25)$$

получим рекуррентное соотношение для $D_n(r)$ следующего вида

$$(n+1)D_{n+1}(r) - 2x\left(n + l + 1 - \frac{2r\rho}{y-1}\right)D_n(r) +$$
$$+(n+2l+1)D_{n-1}(r) = 0$$
$$D_{-1}(r) = 0, \quad D_0(r) = 1 \qquad (26)$$
$$x = \frac{y-1}{y+1}$$

которая по виду совпадает с [3, (3.3)], но с разными начальными условиями. При этом в конечном результате начальное значение $D_{-1}(r) = 0$ нужно допроверить условием $\lim\limits_{n=-1} \Gamma(n+1) D_n(r) = 0$, которая следует из (24) и (25). Для данного рекуррентного соотношения производящая функция с соответствующими начальными условиями для $D_n(r)$ будет соответствовать виду

$$\left(1 - \frac{\omega}{\omega_2^*}\right)^{\alpha_1} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_2}\right)^{\alpha_1^*} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(r)\omega^n .$$

Здесь параметры α_1, ω_2 соответствуют из (18b) и (18c). Легко получить, что

$$D_n(r) = \frac{\left(-\alpha_1^*\right)_n}{\omega_2^n n!}\, {}_2F_1\left[\left.\begin{matrix} -n & -\alpha_1 \\ 1+\alpha_1^* - n & \end{matrix}\right| \omega_2^2\right] \qquad (27)$$

и таким образом из (25) получим

$$\det \mathbf{A}_n(r) = \left(\frac{y+1}{4\rho\omega_2}\right)^n \left(-\alpha_1^*\right)_n {}_2F_1\left[\left.\begin{matrix} -n & -\alpha_1 \\ 1+\alpha_1^* - n & \end{matrix}\right| \omega_2^2\right]$$

как видим, это выражение совпадает с (22). Отметим что $D_n(r)$ в (27) являются ортогональными многочленами Поллачека вдоль разреза вещественных параметров $\operatorname{Re} y > 0$ [8] для бесконечного промежутка $-\infty < r < +\infty$ с весовой функцией

$$w^l(t,\theta) = \frac{\left(2\sin\theta\right)^{2l+2}}{2\pi(2l+1)!} e^{t(\pi - 2\theta)} \left|\Gamma(l+1+it)\right|^2$$

причем

$$\left\langle D_n, D_m \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dr\, w^l\left(\frac{\rho r}{\sqrt{y}}, \theta\right) D_n(r) D_m(r) =$$
$$= \frac{\sqrt{y}}{\rho} \frac{(n+2l+1)!}{n!(2l+1)!} \delta_{n,m}$$

Вне разреза $\operatorname{Re} y > 0$ многочлены $D_n(r)$ уже не будут ортогональными.

Теперь рассмотрим P_n. Из (14) (или из (23)), а также из (25) можно выразить как

$$P_n = \sqrt{\frac{(2l+1)!\, n!}{(n+2l+1)!}} D_n(r) \qquad (28)$$

При таких значениях r_k, в котором $D_N(r_k) = 0$ из рекуррентного соотношения (26) можно получить, что

$$D_{N-2}(r_k) =$$
$$= \frac{2}{N+2l}\left((N+l)\cos\theta - \frac{\rho r_k}{\sqrt{y}}\sin\theta\right) D_{N-1}(r_k)$$

и выражая связь между P_{N-1} и P_{N-2} при $r = r_k$ из (28), получим для (13) компонент $V_{N;N-1}$ в виде

$$V_{N;N-1} = P_{N-1}$$

и таким образом при r_k, в котором выполняется условие (16) равенство нулю определителя $\det \mathbf{S}_N(r_k) = 0$, все собственные вектора (13) матричного элемента (12) будут иметь одинаковое выражение

$$V_{N;n} = P_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Так как коэффициент при старшей степени $D_n(r)$ равен $\dfrac{1}{n!}\left(-\dfrac{2\rho}{\sqrt{y}}\sin\theta\right)^n$, то используя формулу Дарбу-Кристоффеля, получим квадрат нормы вектора $\mathbf{V}_N$

$$\sum_{n=0}^{N-1} P_n^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\left\langle D_n, D_n \right\rangle} D_n^2 =$$
$$= \frac{\sqrt{y}}{2\rho\sin\theta} \frac{N!(2l+1)!}{(N+2l)!}\left(D'_{N-1}D_N - D'_N D_{N-1}\right) =$$
$$= \frac{y+1}{4\rho} \frac{N!(2l+1)!}{(N+2l)!}\left(D'_{N-1}D_N - D'_N D_{N-1}\right)$$

Отметим, что данное выражение есть как следствие рекуррентного соотношения (26) и поэтому справедливо при всех параметрах y (условие ортогональности $D_n(r)$ является не обязательным). Соответственно нормированные собственные вектора (13) при $r = r_k$ (16) будут

$$\tilde{V}_{N;n} = \sqrt{\frac{4\rho}{y+1}\frac{n!(2l+N)!}{N!(2l+n+1)!}}\frac{D_n(r_k)}{\sqrt{-D'_N(r_k)D_{N-1}(r_k)}}$$
$$n,k = 0,1,\ldots,N-1$$

Асимптотическое поведение при $N \to \infty$

Функция (21) при $\operatorname{Im} y = 0$ является вещественной. Рассмотрим несколько областей.

A. $\operatorname{Re} y < 0, \operatorname{Im} y = 0$. (связанные состояния)

Пусть для удобной записи $y = -\tilde{y} < 0$. В этом случае (21) представится как (здесь для сокращенной записи $\tilde{t} = \frac{\rho r}{\sqrt{\tilde{y}}} > 0$)

$$Q_{n;-1}(r) = l!\left(\frac{\sqrt{\tilde{y}}+1}{\sqrt{\tilde{y}}-1}\right)^n \frac{\left(l+1+\tilde{t}\right)_n}{n!}\times$$
$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n & l+1-\tilde{t}\\ -l-n-\tilde{t} & \end{matrix}\middle|\left(\frac{\sqrt{\tilde{y}}-1}{\sqrt{\tilde{y}}+1}\right)^2\right] \quad (29)$$

Его асимптотическое поведение при $n \to \infty$ будет иметь вид

$$-\frac{l!}{\Gamma\left(l+1+\tilde{t}\right)}\left(\frac{4\sqrt{\tilde{y}}}{\left(\sqrt{\tilde{y}}+1\right)^2}\right)^{-l-1+\tilde{t}}\times$$
$$\times\left(\frac{\sqrt{\tilde{y}}+1}{\sqrt{\tilde{y}}-1}\right)^n n^{l+\tilde{t}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Таким образом для (20) получим

$$\det \mathbf{S}_n(r) = \frac{l!}{\Gamma\left(l+1+\tilde{t}\right)}\left(\frac{4n\sqrt{\tilde{y}}}{\left(\sqrt{\tilde{y}}+1\right)^2}\right)^{\tilde{t}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Как видно, $\det \mathbf{S}_\infty(r) = 0$ при значениях r_k, при которых Гамма функция в знаменателе будет бесконечной, т.е. при $l+1+\tilde{t} = -k, (k = 0,1,2,\ldots)$.

$$\det \mathbf{S}_\infty(r_k) = 0$$
$$r_k = -\frac{\sqrt{\tilde{y}}}{\rho}\left(k+l+1\right), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

В этой области ($\operatorname{Re} y < 0$) все собственные значения бесконечно размерной матрицы (12) меньше нуля. Соответственно при таких значениях r_k, (29) можно представить в виде

$$Q_{n;-1}(r_k) = -\frac{l!}{n!}\left(\frac{\sqrt{\tilde{y}}+1}{\sqrt{\tilde{y}}-1}\right)^n \frac{(-1)^n k!}{(k-n)!}\times$$
$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n & 2l+2+k\\ k-n+1 & \end{matrix}\middle|\left(\frac{\sqrt{\tilde{y}}-1}{\sqrt{\tilde{y}}+1}\right)^2\right], \quad k \ge n$$

$$Q_{n;-1}(r_k) = -\frac{l!}{n!}\left(\frac{\sqrt{\tilde{y}}-1}{\sqrt{\tilde{y}}+1}\right)^{n-2k} \frac{(-1)^k (n+2l+1)!\, n!}{(k+2l+1)!\,(n-k)!}\times$$
$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix}-k & 2l+2+n\\ n-k+1 & \end{matrix}\middle|\left(\frac{\sqrt{\tilde{y}}-1}{\sqrt{\tilde{y}}+1}\right)^2\right], \qquad k < n$$

B. $\operatorname{Re} y > 0, \ \operatorname{Im} y = 0$ (непрерывный спектр)

Так как (21) вещественная функция при любых параметрах, то представим ее в виде (для сокращенной записи $\omega_2 = e^{-i\theta}, t = \frac{\rho r}{\sqrt{y}} > 0$)

$$-\frac{l!\left(l+1+it\right)_n e^{in\theta}}{2n!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-n & l+1-it\\ -l-n-it & \end{matrix}\middle| e^{-i2\theta}\right]-$$
$$-\frac{l!\left(l+1-it\right)_n e^{-in\theta}}{2n!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-n & l+1+it\\ -l-n+it & \end{matrix}\middle| e^{i2\theta}\right]$$

Очевидно, что асимптотическое поведение (21) при больших n будет принимать вид

$$Q_{n,-1}(r) = \left(2\sin\theta\right)^{-l-1} e^{t\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\times$$
$$\times\cos\left(\theta\left(n+l+1\right)-\frac{\pi}{2}\left(l+1\right)+t\ln\left(2n\sin\theta\right)\right)$$
$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

(здесь $\sin\theta = \frac{2\sqrt{y}}{y+1}$), и таким образом в этой области для (20) получим

$$\det \mathbf{S}_n(r) = e^{t\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\times$$
$$\times\frac{\cos\left(\theta\left(n+l+1\right)-\frac{\pi}{2}\left(l+1\right)+t\ln\left(2n\sin\theta\right)\right)}{\cos\left(\theta\left(n+l+1\right)-\frac{\pi}{2}\left(l+1\right)\right)}\times$$
$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Как видим, $\det \mathbf{S}_n(r)$ является быстро осциллирующей функцией, а значения r_n, определяемые из (16), будут неопределенными. Это связано с тем, что многочлены Поллачека в (18а) (или также (25)–(27)) ортогональны при $\operatorname{Re} y > 0$ и, как следствие, его корни при любых n и $n+1$ перемежаются, что дает неопределенность в значении r_n. С физической точки зрения это означает, что в области непрерывного спектра кулоновский потенциал обусловлен дальнодействующим характером, где вместо базиса квадратично интегрируемых функций следовало бы брать релятивистские сферические функции [9].

Литература

1. Зайцев С.А., Кныр В.А., Попов Ю.В. Описание непрерывного спектра трехчастичной кулоновской системы в J-матричном подходе // Ядерная физика. 2007. Т. 70. С. 706–713.
2. Зайцев С.А., Кныр В.А., Попов Ю.В., Ламам-Беннани А. Проблема трех заряженных тел в J-матричном подходе // Вестник ТОГУ. 2007. № 4 (7). С. 73–80.
3. Ахметьянов Р.Ф., Шиховцева Е.С. Т-матричные элементы рассеяния для кулоновских систем взаимодействия // Известия Уфимского научного центра РАН. 2018. № 3. С. 22–27.
4. Ахметьянов Р.Ф., Шиховцева Е.С. Разложение в многомерный рациональный ряд для скалярных степенных функции векторных аргументов // arXiv.org. 2017. URL: https://arxiv.org/abs/1711.07337
5. Ахметьянов Р.Ф., Шиховцева Е.С. // Разложение степенного потенциала на основе обобщенной формулы Гейне. Известия Уфимского научного центра РАН. 2016. № 1. С. 24–31.
6. Pollaczek F. Sur une famille de polynomes orthogonaux a quatre parametres // Comptes Rendus de l’Acad. des Sc. Paris. 1950. V. 230. P. 2254–2256.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. Т. 2. М.: Наука,1974.
8. Pollaczek F. Sur une famille de polynomes orthogonaux qui contient les polynomes d`Hermite et de Laguerre comme cas limites // Comptes Rendus del’Acad. des Sc. Paris. 1950. Т. 230. С. 1563–1565.
9. Долгинов А.З., Топтыгин И.Н. Релятивистские сферические функции // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 1441–1451.

References

1. Zaytsev S.A., Knyr V.A., Popov Yu.V. D*escription* of the *continuous spectrum* of a *three*-body *Coulomb system* within the *J-matrix approach*. Yadernaya fizika, 2007, vol. 70, pp. 706–713.
2. Zaytsev S.A., Knyr V.A., Popov Yu.V., Lahmam-Bennani A. Three-charged-body problem within the J-matrix approach. Vestnik Tikhookeanskogo gosudarstvennogo universiteta, 2007, no. 4 (7), pp. 73–80.
3. Akhmetyanov R.F., Shikhovtseva E.S. T-matrix scattering elements for Coulomb interaction systems. Izvestiya Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN, 2018, no. 3, pp. 22–27.
4. Akhmetyanov R.F., Shikhovtseva E.S. Expansion into a many-dimensional rational series for scalar power functions of vector arguments. arXiv.org. 2017. Available at: https://arxiv.org/abs/1711.07337
5. Akhmetyanov R.F., Shikhovtseva E.S. Expansion of power potential on the basis of generalized Heine formula. Izvestiya Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN, 2016, no. 1, pp. 24–31.
6. Pollaczek F. Sur une famille de polynômes orthogonaux à quatre parameters. Comptes Rendus de l’Acad. des Sc. Paris, 1950, vol. 230, pp. 2254–2256.
7. Bateman H., *Erdélyi* A. Higher transcendental functions. Bessel functions. Parabolic cylinder functions. Orthogonal polynomials. Russian edition. Vol. 2. Moscow, Nauka, 1974.
8. Pollaczek F. Sur une famille de polynômes orthogonaux qui contient les polynômes d’Hermite et de Laguerre comme cas limites. Comptes Rendus del’Acad. des Sc. Paris, 1950, vol. 230, pp. 1563–1565.
9. Dolginov A.Z., Toptygin I.N. Relativistic spherical functions. Zhurnal eksperimentalnoy i teoreticheskoy fiziki, 1959, vol. 37, pp. 1441–1451.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF TWO-PARTICLE T-MATRIX ELEMENTS IN CONTINUOUS AND DISCRETE SPECTRAL REGIONS

© R.F. Akhmetyanov, E.S. Shikhovtseva

Institute of Molecule and Crystal Physics, Ufa Federal Research Centre,
Russian Academy of Sciences
151, prospekt Oktyabrya, 450075, Ufa, Russian Federation

As is known, the main problem in solving the Faddeev equation is the choice of approximation of the interaction potentials, in which The t-matrix scattering elements would acquire a separable form. However, even in this case, the solution of the Faddeev equation does not always become practical, since the t-matrix elements included in the integral equations are no longer factorized. This paper contains a derivation of the representation of two-particle T-matrix scattering elements for Coulomb interaction on special bases without partial wave decomposition, in which addition theorems are fulfilled. Based on this, the Faddeev integral equations are reduced to a factorized form, which allows us to obtain more accurate solutions compared to previously known methods for three-particle systems with Coulomb interaction. The results of this work are applicable not only to the three-body problem when solving the Faddeev equation for three-particle systems, but also to systems consisting of an arbitrary number of particles whose equations belong to the class of Yakubovsky equations-more General than the Faddeev equations.

Key words: Coulomb systems, asymptotic behavior.