

УДК 534.113

DOI: 10.31040/2222-8349-2018-0-4-11-21

ВИБРОДИАГНОСТИКА ПОВРЕЖДЕНИЯ СТЕРЖНЯ

© А.Г. Хакимов

Исследуются собственные продольные, крутильные и изгибные колебания стержня с одним повреждением. В стержне имеется короткий участок с меньшей площадью поперечного сечения, который может быть в любом месте по длине стержня. Этот участок моделирует повреждение, в частности, раскрытую трещину. Задача состоит в определении координаты повреждения и его размеров: длины и площади поперечного сечения в приближении гипотезы плоских сечений по собственным частотам продольных колебаний. Получено, что при расположении повреждения в узле колебаний собственные частоты продольных колебаний не зависят от длины поврежденного участка. Зависимости круговых частот продольных колебаний стержня от координаты повреждения имеют периодический характер. С ростом длины поврежденного участка происходит уменьшение первых двух низших собственных частот продольных колебаний стержня. С ростом относительной площади поврежденного участка происходит увеличение первых двух низших собственных частот продольных колебаний стержня. По трем собственным частотам продольных колебаний определяются координата, длина и площадь поперечного сечения стержня в зоне повреждения. Получено частотное уравнение крутильных колебаний стержня с поврежденным участком. С возрастанием параметра жесткости поперечного сечения в зоне повреждения при постоянном значении полярного момента инерции в этой зоне две низшие частоты собственных крутильных колебаний стержня увеличиваются. А с увеличением полярного момента инерции в зоне повреждения при постоянном значении параметра жесткости поперечного сечения в этой зоне две низшие частоты собственных крутильных колебаний стержня уменьшаются. По двум собственным частотам крутильных колебаний при известных координате повреждения и его длине определяются полярный момент инерции и параметр жесткости поперечного сечения стержня в зоне повреждения. По низшей частоте изгибных колебаний по известной координате, длине, площади поперечного сечения в зоне повреждения определяется осевой момент инерции поперечного сечения стержня в этой зоне. Указаны также другие варианты определения параметров повреждения по собственным частотам колебаний.

Ключевые слова: стержень, собственные частоты, продольные колебания, крутильные колебания, изгибные колебания, повреждение, длина поврежденного участка, координата

Введение. В случае стержней конечной длины для определения наличия его дефектов может быть использовано изменение спектра собственных частот продольных колебаний [1–6], крутильных колебаний [7], изменение частоты собственных изгибных колебаний [8] или продольных и изгибных колебаний [9]. В [1] и ряде других работ трещина в стержне, совершающем продольные колебания, моделируется как продольная пружина, а повреждение в балке, совершающей изгибные колебания, моделируется вращательной пружиной. В [3] дается решение задачи определения переменной площади поперечного сечения от продольной координаты по известной зависимости перемещения свободного конца стержня от частоты возмущающей силы. В [6] приводится простейшая

модель продольных колебаний стержня с зарождающимися поперечными трещинами, где существенным допущением является малость размера трещины по сравнению с площадью поперечного сечения стержня и малое отличие форм колебаний стержня с зарождающимися трещинами и неповрежденного стержня. Учитывается различное проявление трещин в фазах деформаций растяжения и сжатия. Определяются собственные частоты колебаний, а также координаты и размеры трещин по экспериментальным значениям собственных частот. Решению обратных задач о продольных, крутильных и изгибных установившихся волнах в стержнях конечной длины посвящены работы [2, 4–9]. В [8] исследовано поведение собственных частот балки с продольным надрезом (трещиной)

и балки без надреза (бездефектной балки). Выявлено, что одного спектра частот изгибных колебаний еще недостаточно для однозначной идентификации глубины и ширины продольного надреза. Метод конечных элементов используется для анализа изгибных колебаний невращающегося ротора с открытыми трещинами в [10]. В [11] представлен интегральный признак идентификации дефектов в элементах стержневых конструкций, позволяющий определять не только их наличие и местоположение, но и степень поврежденности.

Здесь исследуются собственные продольные, крутильные и изгибные колебания стержня с одним повреждением. Решена обратная задача по определению параметров повреждения стержня по собственным частотам продольных, крутильных и изгибных колебаний.

Продольные колебания. Продольные колебания стержня с надрезом и с сосредоточенными массами на концах рассмотрены в [4], где получены частотные уравнения в виде определителя. Рассматривается напряженно-деформированное состояние прямого стержня, закрепленного верхним и нижним концами на упругом подвесе жесткостью k_{1x} и k_{2x} и растянутого под действием собственного веса и силы тяжести грузов массами M_1 , M_2 (рис. 1). Обозначим через L , F – длину и площадь поперечного сечения стержня, E , ρ , μ – модуль упругости, плотность и коэффициент внутреннего трения, через l , f – длину и площадь поперечного сечения повреждения, x_c – его координату, u , T – перемещение и силу натяжения стержня. Вблизи повреждения имеется сложное пространственное напряженно-деформированное состояние, однако для простоты принимаем одноосное растяжение – сжатие. Между напряжением σ и деформацией ε принимается следующая зависимость:

$$\sigma = E \left(\varepsilon + \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

В соответствии со сказанным имеем

$$E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$T = EF \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right).$$

Отсчитывая координату x от точки крепления, запишем граничные условия

$$T = k_{1x} u + M_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (x = 0), \quad (2)$$

$$T = -k_{2x} u - M_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (x = L).$$

Обозначая функции в областях $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_c + l$, $x_c + l \leq x \leq L$ индексами «1», «2», «3» соответственно, запишем условия стыковки решений при $x = x_c$ и $x = x_c + l$ (условия равенства усилий и перемещений):

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} = m_f \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right), \quad (3)$$

$$u_1 = u_2, \quad (x = x_c),$$

$$m_f \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right) = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial t}, \quad (4)$$

$$u_2 = u_3, \quad (x = x_c + l), \quad m_f = \frac{f}{F}.$$

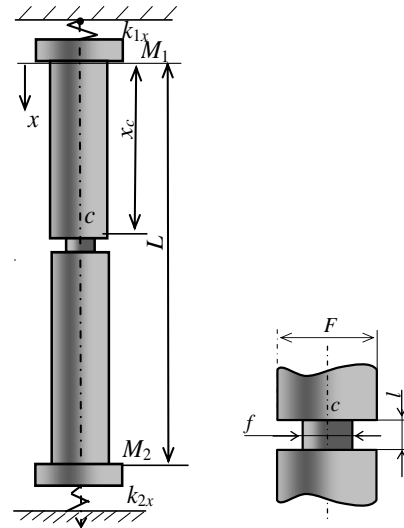


Рис. 1. Расчетная схема

Условия вида (3), (4) приводятся также в статье [12], где предложена универсальная процедура обработки данных разрезного стержня Гопкинсона [13].

Частное решение задачи (1) при $\mu = 0$ имеет вид

$$u = (A_i \cos \alpha_i x + B_i \sin \alpha_i x) \sin \omega_i t,$$

$$(\alpha_i = \omega_i / a_i, a_i^2 = E_i / \rho_i),$$

а шесть констант в этом решении, записанном для областей $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_{cl}$, $x_{cl} \leq x \leq L$ ($x_{cl} = x_c + l$) определяются из шести граничных условий (2)–(4). Отметим, что волновое число α для продольных колебаний в зоне повреждения не изменяется, если модули упругости и плотности материала стержня одинаковые на всех трех участках соответственно, $\alpha_i = \alpha$ ($i = 1 \div 3$). Для того чтобы A_i , B_i ($i = 1 \div 3$) не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы следующий определитель равнялся нулю

$$\det(a_{ij}) = 0. \quad (5)$$

Ненулевые элементы определителя (5) записываются в виде

$$\begin{aligned} a_{11} &= k_{1x} - M_1 \omega_l^2, a_{12} = -EFa, \\ a_{25} &= (-k_{2x} + M_2 \omega_l^2) \cos(\alpha L) + EFa \sin(\alpha L), \\ a_{26} &= -EFa \cos(\alpha L) + (-k_{2x} + M_2 \omega_l^2) \sin(\alpha L), \\ a_{31} &= \sin(\alpha x_c), a_{32} = -\cos(\alpha x_c), \\ a_{33} &= -m_f \sin(\alpha x_c), a_{34} = m_f \cos(\alpha x_c), \\ a_{41} &= \cos(\alpha x_c), a_{42} = \sin(\alpha x_c), \\ a_{43} &= -\cos(\alpha x_c), a_{44} = -\sin(\alpha x_c), \\ a_{53} &= m_f \sin(\alpha x_{cl}), a_{54} = -m_f \cos(\alpha x_{cl}), \\ a_{55} &= -\sin(\alpha x_{cl}), a_{56} = \cos(\alpha x_{cl}), \\ a_{63} &= \cos(\alpha x_{cl}), a_{64} = \sin(\alpha x_{cl}), \\ a_{65} &= -\cos(\alpha x_{cl}), a_{66} = -\sin(\alpha x_{cl}). \end{aligned}$$

Условие (5) дает частотное уравнение, которое здесь не приводится из-за его громоздкости. Если частное решение представить в амплитудной форме $u_i = C_i \sin(\alpha_i x + \delta_i) \sin \omega_l t$, то частотное уравнение после исключения шести констант C_i, δ_i ($i=1, 2, 3$) записывается

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \operatorname{tg} \left\{ \alpha_2 x_{cl} + \operatorname{arctg} \left[m_f \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{tg} \left(\alpha_1 x_c + \operatorname{arctg} \frac{EF_1 \alpha_1}{k_{1x} - M_1 \omega_l^2} \right) \right] \right\} - \\ & - \alpha_2 x_c \end{aligned} \right\} = (6) \\ & = m_f \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{tg} \left(\alpha_3 x_{cl} + \operatorname{arctg} \frac{EF_3 \alpha_3}{-k_{2x} + M_2 \omega_l^2} - \alpha_3 L \right). \end{aligned}$$

Когда коэффициенты $k_{1x}, k_{2x} \rightarrow \infty$, тогда частотное уравнение упрощается.

Для стержня без повреждения и без сосредоточенных масс из частотного уравнения следует, что $\cos \alpha L = 0$, а собственные частоты равны [1] $\alpha L = (2k-1)\pi/2$ ($k = 1, 2, \dots$) или $\omega_{lk} = (2k-1)\pi a/2L$.

Для определения x_c, l и m_f необходимо провести анализ собственных частот продольных колебаний стержня с повреждением. Такой анализ проведен в работах [1–6].

Прямая задача. Решение уравнения (6) проведено численно для следующих параметров системы: $E=2 \times 10^{11}$ Па, $\rho=7800$ кг/м³, $L=200$ мм, диаметр образца $D=10$ мм, $x_c=15$ мм,

$l=1$ мм, $k_{1x} \rightarrow \infty, k_{2x}=0, M_1=0$ кг, $M_2=0$ кг. Скорость звука $a = 5063.6$ м/с. При этом первая, вторая и третья собственные частоты стержня без повреждения $\omega_{11} = 39770.1819$ рад/с, $\omega_{12} = 119310.5458$ рад/с, $\omega_{13} = 198850.9097$ рад/с. Для стержня с повреждением при $x_c=15$ мм, $m_f=0.707, l=1$ мм решение прямой задачи дает, что круговые частоты продольных колебаний стержня $\omega_{11} = 39690.0559$ рад/с, $\omega_{12} = 119118.3972$ рад/с, $\omega_{13} = 198671.0768$ рад/с.

На рис. 2 приводятся зависимости круговых частот продольных колебаний стержня $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}$ от координаты повреждения x_c для параметра $m_f=0.707$ и различных l (кривая 1 – 0.001, 2 – 0.002, 3 – 0.003 м). Эти зависимости имеют периодический характер. На рис. 3 приводятся зависимости круговых частот продольных колебаний стержня $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}$ от длины поврежденного участка l для параметра $m_f=0.707$ и различных координат x_c (кривая 1 – 0.01, 2 – 0.02, 3 – 0.03 м). Видно, что с ростом длины поврежденного участка происходит уменьшение первых двух низших собственных частот продольных колебаний стержня. На рис. 4 даются зависимости круговых частот продольных колебаний стержня $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}$ от параметра m_f для длины поврежденного участка $l=0.01$ м и различных координат x_c (кривая 1 – 0.01, 2 – 0.02, 3 – 0.03 м). Видно, что с ростом относительной площади поврежденного участка (параметра m_f) происходит увеличение первых двух низших собственных частот продольных колебаний стержня.

Обратная задача. Если частотное уравнение записать для трех частот свободных продольных колебаний, то из полученной системы уравнений определяются координата повреждения x_c , его длина l и параметр m_f . Например, для круговых частот продольных колебаний стержня $\omega_{11}=39690$ рад/с, $\omega_{12} = 119118$ рад/с, $\omega_{13} = 198671$ рад/с решение обратной задачи дает, что стержень имеет повреждение $x_c = 14.847$ мм, $m_f = 0.722, l=1.075$ мм.

На рис. 5 приводятся зависимости координаты повреждения x_c (фрагмент а), его длины l (фрагмент б) и параметра m_f (фрагмент в) от круговых частот продольных колебаний стержня ω_{11} , для $\omega_{12} = 118350$ рад/с (кривая 1), $\omega_{12} = 118360$ рад/с (кривая 2), $\omega_{12} = 118370$ рад/с (кривая 3), $\omega_{13} = 202970$ рад/с.

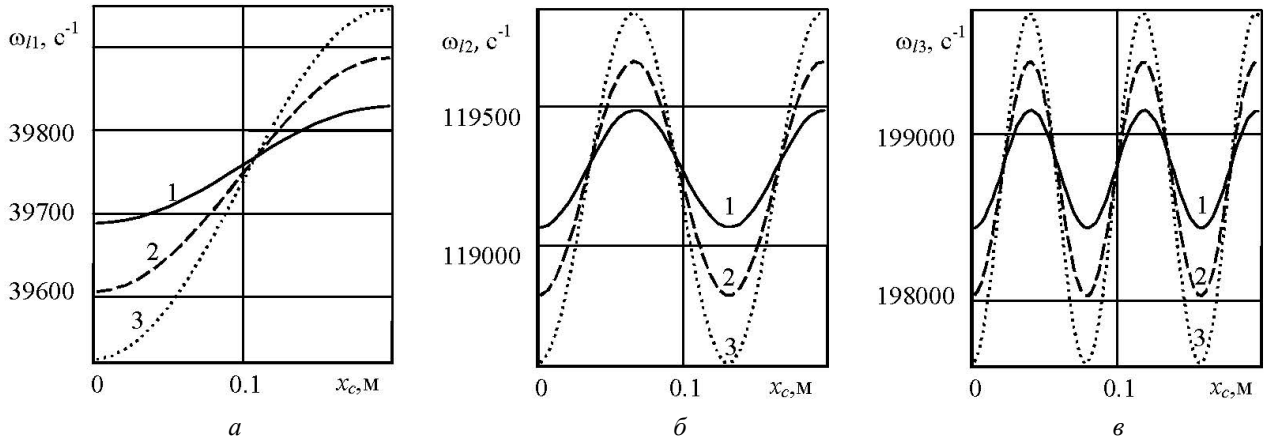


Рис. 2. Зависимости круговых частот продольных колебаний стержня $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ от координаты повреждения x_c для параметра $m_f=0.707$ и различных l (кривая 1 – 0.001, 2 – 0.002, 3 – 0.003 м)

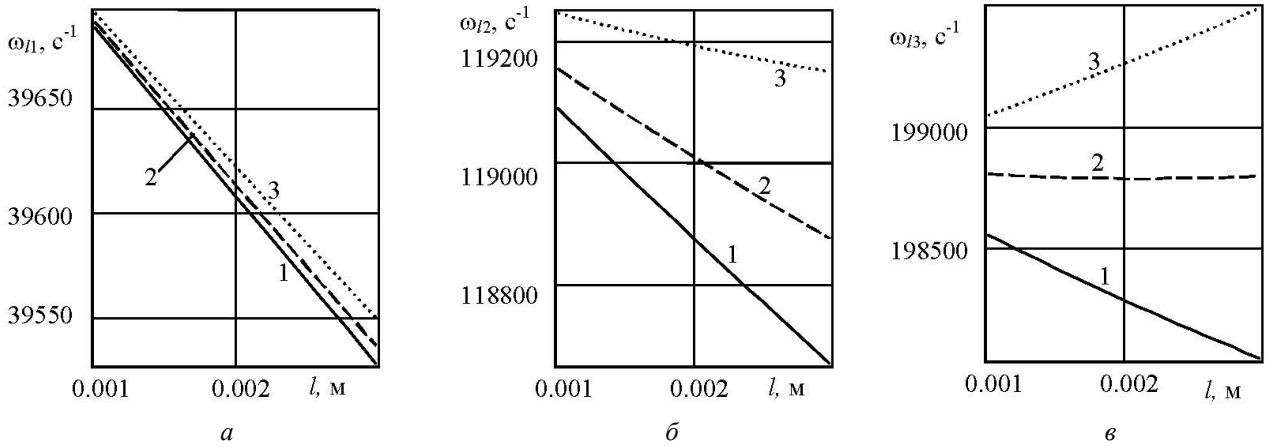


Рис. 3. Зависимости круговых частот продольных колебаний стержня $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ от длины поврежденного участка l для параметра $m_f=0.707$ и различных координат x_c (кривая 1 – 0.01, 2 – 0.02, 3 – 0.03 м)

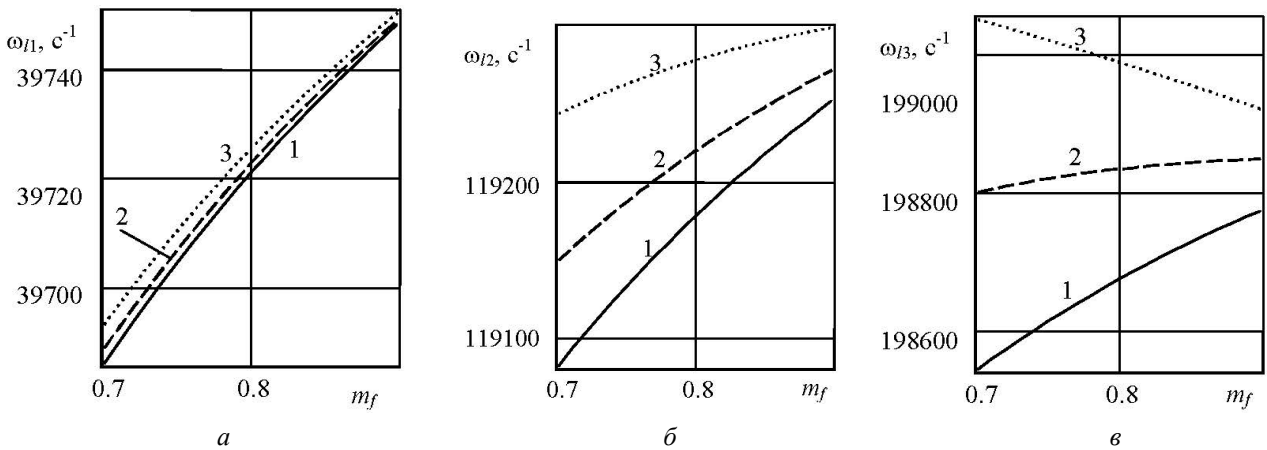


Рис. 4. Зависимости круговых частот продольных колебаний стержня $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ от параметра m_f для длины поврежденного участка $l=0.01$ м и различных координат x_c (кривая 1 – 0.01, 2 – 0.02, 3 – 0.03 м)

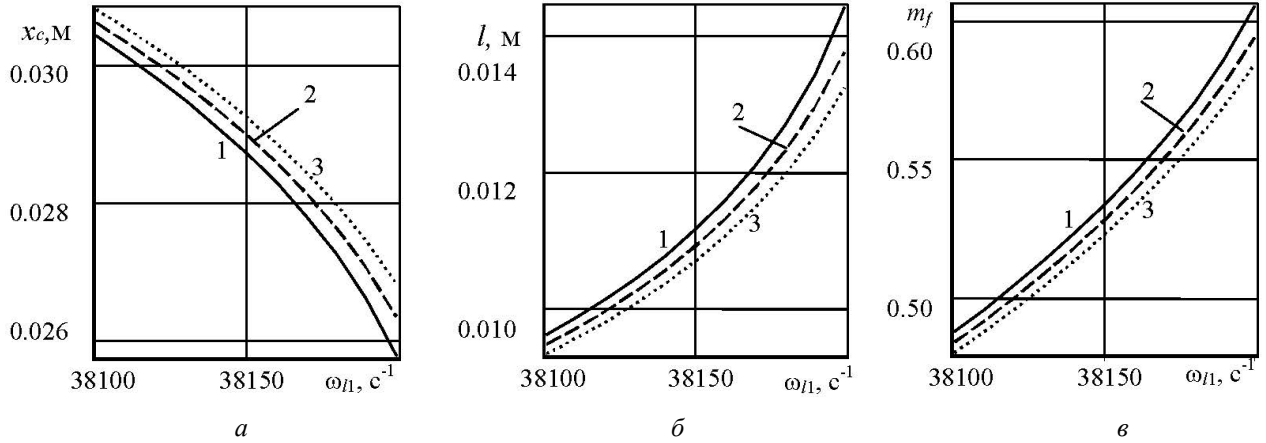


Рис. 5. Зависимости координаты повреждения x_c (фрагмент а), его длины l (фрагмент б) и параметра m_f (фрагмент в) от круговых частот продольных колебаний стержня ω_{11} , для $\omega_{12} = 118350$ рад/с (кривая 1), $\omega_{12} = 118360$ рад/с (кривая 2), $\omega_{12} = 118370$ рад/с (кривая 3), $\omega_{13} = 202.970$ рад/с

Проведенные исследования показывают, что по трем частотам свободных продольных колебаний можно определить координату повреждения x_c , его длину l и параметр m_f .

Крутильные колебания. Рассматриваются собственные крутильные колебания стержня с повреждением. Стержень закреплен верхним и нижним концами на упругих опорах с жесткостью на кручение c_{1x} и c_{2x} и соединен по концам с дисками с моментами инерции J_1 и J_2 (рис. 6). Задача состоит в определении момента инерции и параметра жесткости поперечного сечения стержня в зоне повреждения.

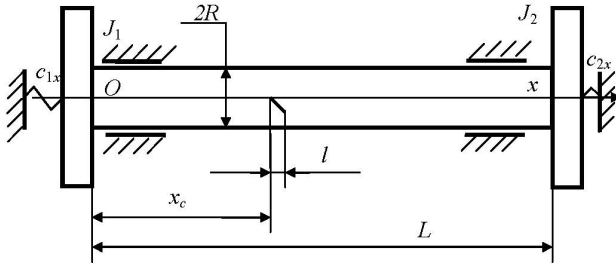


Рис. 6. Расчетная схема для крутильных колебаний стержня

Обозначим через J_p , J_k полярный момент инерции и параметр жесткости поперечного сечения неповрежденной части стержня, через G модуль сдвига, через j_p , j_k полярный момент инерции и параметр жесткости поперечного сечения стержня в зоне повреждения, через φ , M угол поворота и крутящий момент в сечении стержня, причем для стержня с круглым сечением [14]

$$J_k = J_p = \frac{\pi R^4}{2}, \quad j_p \leq J_p.$$

Между крутящим моментом M и относительным углом закручивания θ принимается следующая зависимость:

$$M = GJ_k \theta, \quad \theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Уравнение крутильных колебаний имеет вид

$$GJ_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad M = GJ_k \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (7)$$

Граничные условия записываются в виде

$$M = c_{1x} \varphi + J_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (x = 0), \quad (8)$$

$$M = -c_{2x} \varphi - J_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (x = L).$$

Условия стыковки решений при $x = x_c$ и $x = x_c + l$ (условия равенства крутящих моментов и углов поворота) имеют вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = m_k^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad (x = x_c), \quad (9)$$

$$m_k^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \varphi_3, \quad (10)$$

$$(x = x_c + l), \quad m_k^2 = \frac{j_k}{J_k}.$$

Частное решение задачи (7) имеет вид $\varphi = (A_i \cos \alpha_i x + B_i \sin \alpha_i x) \sin \omega_i t$ ($\alpha_i = \omega_i / a_i$),

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \omega_i / a_1 = \omega_i \sqrt{\rho J_p / GJ_k},$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 m_p / m_k, \quad m_p = \sqrt{J_p / J_p}.$$

Шесть констант в этом решении, записанном для областей $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_{cl}$, $x_{cl} \leq x \leq L$, определяются из шести граничных условий

(8)–(10). Для того чтобы $A_i, B_i (i = 1 \div 3)$ не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы определитель вида (5) равнялся нулю. Ненулевые элементы этого определителя записываются в виде

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_{1x} - J_1 \omega_i^2, a_{12} = -GJ_k \alpha_1, \\ a_{25} &= (-c_{2x} + J_2 \omega_i^2) \cos(\alpha_3 L) + GJ_k \alpha_3 \sin(\alpha_3 L), \\ a_{26} &= (-c_{2x} + J_2 \omega_i^2) \sin(\alpha_3 L) - GJ_k \alpha_3 \cos(\alpha_3 L), \\ a_{31} &= \sin(\alpha_1 x_c), a_{32} = -\cos(\alpha_1 x_c), \\ a_{33} &= -m_k m_p \sin(\alpha_2 x_c), a_{34} = m_k m_p \cos(\alpha_2 x_c), \\ a_{41} &= \cos(\alpha_1 x_c), a_{42} = \sin(\alpha_1 x_c), \\ a_{43} &= -\cos(\alpha_2 x_c), a_{44} = -\sin(\alpha_2 x_c), \\ a_{53} &= \alpha_1 m_k m_p \sin(\alpha_2 x_{cl}), \\ a_{54} &= -\alpha_1 m_k m_p \cos(\alpha_2 x_{cl}), a_{55} = -\alpha_3 \sin(\alpha_3 x_{cl}), \\ a_{56} &= \alpha_3 \cos(\alpha_3 x_{cl}), \\ a_{63} &= \cos(\alpha_2 x_{cl}), a_{64} = \sin(\alpha_2 x_{cl}), \\ a_{65} &= -\cos(\alpha_3 x_{cl}), a_{66} = -\sin(\alpha_3 x_{cl}). \end{aligned}$$

Если частное решение представить в амплитудной форме $\varphi_i = C_i \sin(\alpha_i x + \delta_i) \sin \omega_i t$, то частотное уравнение после исключения шести констант $C_i, \delta_i (i = 1, 2, 3)$ записывается как

$$\left\{ \begin{aligned} &\alpha_2 x_{cl} + \arctg \left[m_k^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{tg} \left(\alpha_1 x_c + \arctg \frac{GJ_k \alpha_1}{c_{1x} - J_1 \omega_i^2} \right) \right] \\ &- \alpha_2 x_c \end{aligned} \right\} = (11)$$

$$= m_k^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{tg} \left(\alpha_3 x_{cl} + \arctg \frac{GJ_k \alpha_3}{-c_{2x} + J_2 \omega_i^2} - \alpha_3 L \right).$$

В прямой задаче параметры m_k и m_p известны, в обратной задаче необходимо определить эти величины. Когда коэффициенты жесткости c_{1x} и $c_{2x} \rightarrow \infty$ или равны нулю вместе с моментами инерции J_1 и J_2 , тогда частотное уравнение упрощается. Для определения m_k и m_p необходимо провести анализ собственных частот крутильных колебаний вала с повреждением.

Прямая задача. Решение уравнения (11) проведено численно для следующих параметров системы: $G = 0.77 \times 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, $a = 3141.9$ м/с, $L = 0.2$ м, $R = 0.005$ м, $J_1 = J_2 = 0$, $c_{1x} \rightarrow \infty$, $c_{2x} = 0$. При этом первая, вторая и третья собственные частоты стержня без повреждения $\omega_{r1} = 24676.7489$ рад/с, $\omega_{r2} = 74030.2468$ рад/с. Для стержня с повреждением при $x_c = 0.02$ м, $l = 0.005$ м, $m_p = 0.9$, $m_k = 0.8$ решение прямой за-

дачи дает, что круговые частоты крутильных колебаний стержня $\omega_{r1} = 24349.9257$ рад/с, $\omega_{r2} = 73373.6359$ рад/с. На рис. 7 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний стержня ω_{r1} (фрагмент *a*), ω_{r2} (фрагмент *b*) от параметра m_k для координаты повреждения $x_c = 0.02$ м, длины $l = 0.005$ м и различных m_p (кривая 1 – 0.90; 2 – 0.95; 3 – 1.00). Видно, что с возрастанием параметра m_k две низшие частоты собственных крутильных колебаний стержня увеличиваются. На рис. 8 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний стержня ω_{r1} (фрагмент *a*), ω_{r2} (фрагмент *b*) от параметра m_p для координаты повреждения $x_c = 0.02$ м, длины $l = 0.005$ м и различных m_k (кривая 1 – 0.600; 2 – 0.605; 3 – 0.610). С возрастанием параметра m_p две низшие частоты собственных крутильных колебаний стержня уменьшаются.

Обратная задача. Если частотное уравнение записать для двух частот свободных крутильных колебаний, то из полученной системы уравнений определяются параметры m_k и m_p при известных координате повреждения x_c и его длине l . Например, для координаты повреждения $x_c = 0.02$ м, длины $l = 0.005$ м для круговых частот крутильных колебаний вала $\omega_{r1} = 24549$ рад/с, $\omega_{r2} = 73700$ рад/с решение обратной задачи дает, что стержень имеет параметры $m_k = 0.6967$, $m_p = 0.9141$.

На рис. 9 приводятся зависимости параметров: m_k (фрагмент *a*), m_p (фрагмент *b*) от круговой частоты крутильных колебаний стержня ω_{r1} , для $\omega_{r2} = 73700$ рад/с (кривая 1), $\omega_{r2} = 73710$ рад/с (кривая 2), $\omega_{r2} = 73720$ рад/с (кривая 3) для координаты повреждения $x_c = 0.02$ м, длины $l = 0.005$ м.

Проведенные исследования показывают, что при известных координате повреждения и его длине по двум частотам свободных крутильных колебаний можно определить параметр жесткости и полярный момент инерции в зоне повреждения.

Изгибные колебания. Рассматривается напряженно-деформированное состояние консольной балки (рис. 10). Обозначим через J_y, j_y моменты инерции поперечного сечения относительно оси y неповрежденной балки и сечения балки в зоне повреждения, w – прогиб балки. Уравнение, определяющее форму изгибных колебаний балки, имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \lambda^4 w, \quad \lambda^4 = \sqrt[4]{\frac{m_l \omega_f^2}{EJ}}, \quad (12)$$

где m_l – масса единицы длины балки, ω_f – частота. Запишем граничные условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (x=0), \quad M_y = 0, \quad Q_z = 0 \quad (x=L), \quad (13)$$

где M_y, Q_z – изгибающий момент и перерезывающая сила, которые определяются по формулам

$$M_y = EJ_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad Q_z = -EJ_y \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}. \quad (14)$$

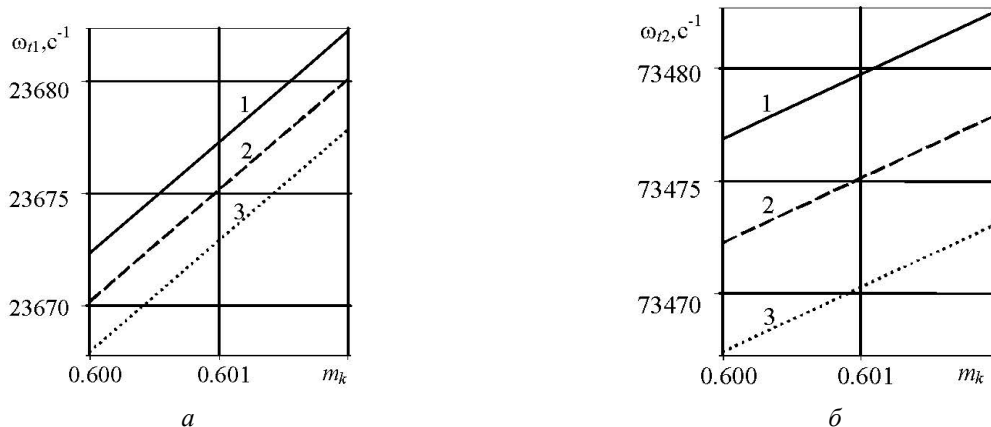


Рис. 7. Зависимости круговых частот крутильных колебаний стержня ω_{11} (фрагмент а), ω_{12} (фрагмент б) от параметра m_k для координаты повреждения $x_c = 0.02$ м, длины $l = 0.005$ м и различных m_p (кривая 1 – 0.90; 2 – 0.95; 3 – 1.00)

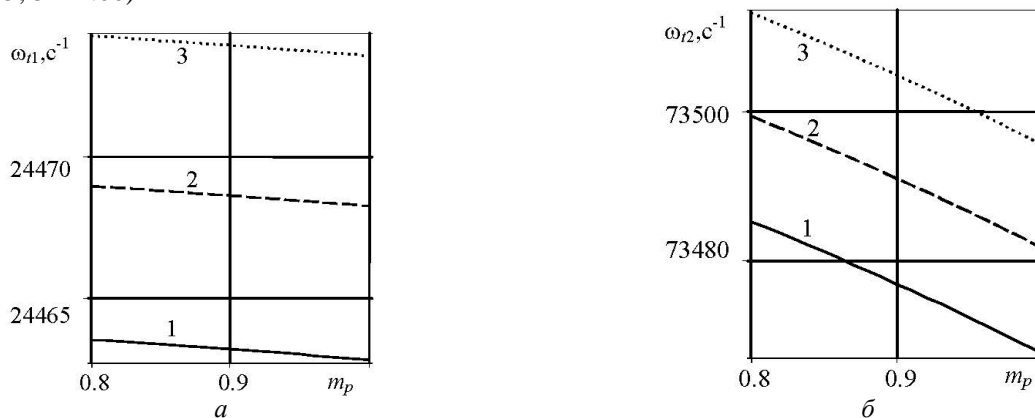


Рис. 8. Зависимости круговых частот крутильных колебаний стержня ω_{11} (фрагмент а), ω_{12} (фрагмент б) от параметра m_p для координаты повреждения $x_c = 0.02$ м, длины $l = 0.005$ м и различных m_k (кривая 1 – 0.600; 2 – 0.605; 3 – 0.610)

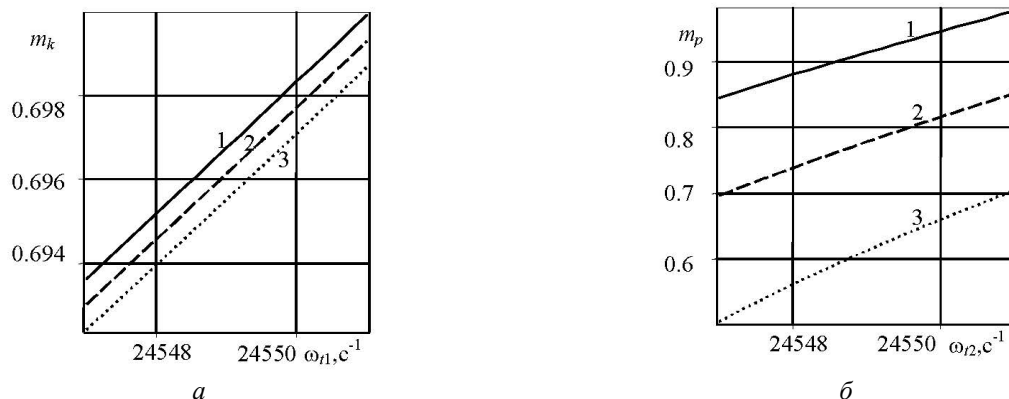


Рис. 9. Зависимости параметров: m_k (фрагмент а), m_p (фрагмент б) от круговой частоты крутильных колебаний стержня ω_{11} , для $\omega_{12} = 73700$ рад/с (кривая 1), $\omega_{12} = 73710$ рад/с (кривая 2), $\omega_{12} = 73720$ рад/с (кривая 3) для координаты повреждения $x_c = 0.02$ м, длины $l = 0.005$ м

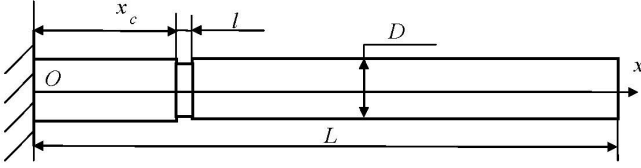


Рис. 10. Расчетная схема для консольной балки

Условия стыкования решений при $x = x_c$ и $x = x_c + l$ (условия равенства перемещений, углов поворота, моментов, перерезывающих сил)

$$\begin{aligned} w_1 &= w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad M_{y1} = M_{y2}, \\ Q_{z1} &= Q_{z2}, \quad (x = x_c), \\ w_2 &= w_3, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_3}{\partial x}, \quad M_{y2} = M_{y3}, \\ Q_{z2} &= Q_{z3}, \quad (x = x_c + l). \end{aligned} \quad (15)$$

Условия (15) с учетом (14) записываются в виде

$$\begin{aligned} w_1 &= w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = m_y \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} &= m_y \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}, \quad (x = x_c), \\ w_2 &= w_3, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_3}{\partial x}, \quad m_y \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}, \\ m_y \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} &= \frac{\partial^3 w_3}{\partial x^3}, \quad m_y = \frac{j_y}{J_y}, \quad (x = x_c + l). \end{aligned} \quad (16)$$

Пользуясь в дальнейшем обозначениями

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_c = \frac{x_c}{L}, \quad \xi_{cl} = \frac{x_c + l}{L}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{L}, \quad \varepsilon = \frac{l}{L},$$

представим (13), (16) в виде (в дальнейшем тильда над w опускается)

$$\begin{aligned} w_1 &= 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi = 0), \quad \frac{\partial^2 w_3}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^3 w_3}{\partial \xi^3} = 0 \quad (\xi = 1), \\ w_1 &= w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = \frac{\partial w_2}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w_1^2}{\partial \xi^2} = m_y \frac{\partial w_2^2}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial w_1^3}{\partial \xi^3} &= m_y \frac{\partial w_2^3}{\partial \xi^3}, \quad (\xi = \xi_c), \\ w_2 &= w_3, \quad \frac{\partial w_2}{\partial \xi} = \frac{\partial w_3}{\partial \xi}, \quad m_y \frac{\partial w_2^2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w_3}{\partial \xi^2}, \\ m_y \frac{\partial^3 w_2}{\partial \xi^3} &= \frac{\partial^3 w_3}{\partial \xi^3}, \quad (\xi = \xi_c + \varepsilon). \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели повреждения фигурируют длина повреждения ε , его координата ξ_c и параметр повреждения m_y .

Прогиб балки на трех участках представляется в виде [15]

$$\begin{aligned} w_1 &= C_1 y_{11} + C_2 y_{12} + C_3 y_{13} + C_4 y_{14}, \\ w_2 &= C_5 y_{21} + C_6 y_{22} + C_7 y_{23} + C_8 y_{24}, \\ w_3 &= C_9 y_{31} + C_{10} y_{32} + C_{11} y_{33} + C_{12} y_{34}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} y_{i1} &= \frac{\cos \lambda_i \xi + c h \lambda_i \xi}{2}, \quad y_{i2} = \frac{\sin \lambda_i \xi + sh \lambda_i \xi}{2}, \\ y_{i3} &= \frac{-\cos \lambda_i \xi + c h \lambda_i \xi}{2}, \\ y_{i4} &= \frac{-\sin \lambda_i \xi + sh \lambda_i \xi}{2}, \quad \lambda_i^4 = \lambda_i^{*4} L^4, \end{aligned}$$

линейно независимые решения уравнения (12) [15], удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} y_{i1}(0) &= 1, \quad y_{i1}'(0) = 0, \quad y_{i1}''(0) = 0, \quad y_{i1}'''(0) = 0, \\ y_{i2}(0) &= 0, \quad y_{i2}'(0) = \lambda_i, \quad y_{i2}''(0) = 0, \quad y_{i2}'''(0) = 0, \\ y_{i3}(0) &= 0, \quad y_{i3}'(0) = 0, \quad y_{i3}''(0) = \lambda_i^2, \quad y_{i3}'''(0) = 0, \\ y_{i4}(0) &= 0, \quad y_{i4}'(0) = 0, \quad y_{i4}''(0) = 0, \quad y_{i4}'''(0) = \lambda_i^3. \end{aligned}$$

Для стержня круглого поперечного сечения

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \sqrt[4]{\frac{4\rho\omega_f^2}{ER^2}} L, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = \sqrt[4]{\frac{m_f}{m_y}}$$

и прямоугольного поперечного сечения

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \sqrt[4]{\frac{12\rho\omega_f^2}{EH^2}} L, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = \sqrt[4]{\frac{m_f}{m_y}},$$

где H – высота сечения.

Функции $y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}$ связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} y_{i1}' &= \lambda_i y_{i4}, \quad y_{i2}' = \lambda_i y_{i1}, \quad y_{i3}' = \lambda_i y_{i2}, \quad y_{i4}' = \lambda_i y_{i3}, \\ y_{i1}'' &= \lambda_i^2 y_{i3}, \quad y_{i2}'' = \lambda_i^2 y_{i4}, \quad y_{i3}'' = \lambda_i^2 y_{i1}, \quad y_{i4}'' = \lambda_i^2 y_{i2}, \\ y_{i1}''' &= \lambda_i^3 y_{i2}, \quad y_{i2}''' = \lambda_i^3 y_{i3}, \quad y_{i3}''' = \lambda_i^3 y_{i4}, \quad y_{i4}''' = \lambda_i^3 y_{i1}. \end{aligned}$$

Граничные условия и условия (17) в развернутом виде с учетом вышеприведенных соотношений принимают вид

$$\begin{aligned} C_9 y_{33}(1) + C_{10} y_{34}(1) + C_{11} y_{31}(1) + C_{12} y_{32}(1) &= 0, \\ C_9 y_{32}(1) + C_{10} y_{33}(1) + C_{11} y_{34}(1) + C_{12} y_{31}(1) &= 0, \\ C_3 y_{13}(\xi_c) + C_4 y_{14}(\xi_c) &= \\ = C_5 y_{21}(\xi_c) + C_6 y_{22}(\xi_c) + C_7 y_{23}(\xi_c) + C_8 y_{24}(\xi_c), \\ C_3 y_{12}(\xi_c) + C_4 y_{13}(\xi_c) &= \\ = C_5 y_{24}(\xi_c) + C_6 y_{21}(\xi_c) + C_7 y_{22}(\xi_c) + C_8 y_{23}(\xi_c), \\ C_3 y_{11}(\xi_c) + C_4 y_{12}(\xi_c) &= \\ = m_y [C_5 y_{23}(\xi_c) + C_6 y_{24}(\xi_c) + C_7 y_{21}(\xi_c) + C_8 y_{22}(\xi_c)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & C_3 y_{14}(\xi_c) + C_4 y_{11}(\xi_c) = \\
 & = m_y [C_5 y_{22}(\xi_c) + C_6 y_{23}(\xi_c) + C_7 y_{24}(\xi_c) + C_8 y_{21}(\xi_c)], \\
 & C_5 y_{21}(\xi_{cl}) + C_6 y_{22}(\xi_{cl}) + C_7 y_{23}(\xi_{cl}) + C_8 y_{24}(\xi_{cl}) = \\
 & = C_9 y_{31}(\xi_{cl}) + C_{10} y_{32}(\xi_{cl}) + C_{11} y_{33}(\xi_{cl}) + C_{12} y_{34}(\xi_{cl}), \\
 & C_5 y_{24}(\xi_{cl}) + C_6 y_{21}(\xi_{cl}) + C_7 y_{22}(\xi_{cl}) + C_8 y_{23}(\xi_{cl}) = \\
 & = C_9 y_{34}(\xi_{cl}) + C_{10} y_{31}(\xi_{cl}) + C_{11} y_{32}(\xi_{cl}) + C_{12} y_{33}(\xi_{cl}), \\
 & m_y [C_5 y_{23}(\xi_{cl}) + C_6 y_{24}(\xi_{cl}) + C_7 y_{21}(\xi_{cl}) + C_8 y_{22}(\xi_{cl})] = \\
 & = C_9 y_{33}(\xi_{cl}) + C_{10} y_{34}(\xi_{cl}) + C_{11} y_{31}(\xi_{cl}) + C_{12} y_{32}(\xi_{cl}), \\
 & m_y [C_5 y_{22}(\xi_{cl}) + C_6 y_{23}(\xi_{cl}) + C_7 y_{24}(\xi_{cl}) + C_8 y_{21}(\xi_{cl})] = \\
 & = C_9 y_{32}(\xi_{cl}) + C_{10} y_{33}(\xi_{cl}) + C_{11} y_{34}(\xi_{cl}) + C_{12} y_{31}(\xi_{cl}).
 \end{aligned}$$

Для того чтобы $C_3 \div C_{12}$ не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы следующий определитель основной матрицы был равен нулю. Это условие дает частотное уравнение, которое здесь не приводится. Из полученного частотного уравнения по низшей собственной частоте по известной координате повреждения ξ_c , его относительной длине ε и относительной площади m_f можно определить параметр m_y .

Прямая и обратная задачи. Расчеты проведены для следующих параметров стержня: $E = 2 \times 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, $L = 200$ мм, диаметр образца $D = 10$ мм, $x_c = 15$ мм, $l = 1$ мм, $m_f = 0.9$, $m_y = 0.4096$. При этом вычисленные значения первой круговой собственной частоты балки с повреждением $\omega_{f1} = 1108.880110$ с⁻¹. Для стержня без повреждения решение прямой задачи дает, что собственные частоты изгибных колебаний балки $\omega_{f1} = 1112.752212$ с⁻¹. Решение обратной задачи при $x_c = 15$ мм, $l = 1$ мм, $m_f = 0.9$ для $\omega_{f1} = 1111$ с⁻¹ дает, что $m_y = 0.5729$. Таким образом, по известной координате, длине, площади поперечного сечения в зоне повреждения по низшей частоте изгибных колебаний определяется осевой момент инерции поперечного сечения стержня в этой зоне.

Пример. Рассмотрим решение прямой задачи по определению трех низших собственных частот продольных колебаний, двух низших частот крутильных колебаний и одной низшей частоты изгибных колебаний стержня для следующих параметров системы: $E = 2 \times 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, $L = 200$ мм, диаметр образца $D = 10$ мм, $k_{1x} \rightarrow \infty$, $k_{2x} = 0$, $M_1 = 0$ кг, $M_2 = 0$ кг,

$x_c = 40$ мм, $l = 2$ мм, $m_f = 0.8$, $G = 0.77 \times 10^{11}$ Па, $J_1 = J_2 = 0$, $c_{1x} \rightarrow \infty$, $c_{2x} = 0$, $m_p = 0.9$, $m_k = 0.8$, $m_y = 0.5220$. При этом первая, вторая и третья собственные частоты продольных колебаний стержня без повреждения $\omega_{f1} = 39770.18194$ рад/с, $\omega_{f2} = 119310.5458$ рад/с, $\omega_{f3} = 198850.9097$ рад/с, первая и вторая собственные частоты крутильных колебаний $\omega_{f1} = 24676.74894$ рад/с, $\omega_{f2} = 74030.24683$ рад/с, первая собственная частота изгибных колебаний консольной балки $\omega_{f1} = 1112.752212$ рад/с. Для стержня с повреждением решение прямой задачи дает, что круговые частоты продольных колебаний стержня $\omega_{f1} = 39688.95432$ рад/с, $\omega_{f2} = 119375.2700$ рад/с, $\omega_{f3} = 199248.035$ рад/с, круговые частоты крутильных колебаний $\omega_{f1} = 24557.37985$ рад/с, $\omega_{f2} = 73991.25473$ рад/с, круговая частота изгибных колебаний $\omega_{f1} = 1112.167523$ рад/с.

Решение обратной задачи для круговых частот продольных колебаний стержня $\omega_{f1} = 39670$ рад/с, $\omega_{f2} = 119400$ рад/с, $\omega_{f3} = 199200$ рад/с, круговых частот крутильных колебаний $\omega_{f1} = 24500$ рад/с, $\omega_{f2} = 73980$ рад/с и круговой частоты изгибных колебаний $\omega_{f1} = 1115$ рад/с дает, что повреждение имеет параметры: $x_c = 44.65$ мм, $l = 1.03$ мм, $m_f = 0.621$, $m_p = 0.818$, $m_k = 0.615$, $m_y = 0.500$.

Обсуждение. Задача вибродиагностики стержня по собственным частотам продольных, крутильных и изгибных колебаний стержня с одним повреждением может быть решена также следующим образом.

1. По четырем собственным частотам крутильных колебаний определяются координата, длина участка повреждения, полярный момент инерции и параметр жесткости поперечного сечения стержня в зоне повреждения. По двум собственным частотам изгибных колебаний при известных координате повреждения и его длине определяются площадь и осевой момент инерции поперечного сечения стержня в этой зоне.

2. По четырем собственным частотам изгибных колебаний определяются координата, длина участка повреждения, площадь и осевой момент инерции поперечного сечения стержня в зоне повреждения. По двум собственным частотам крутильных колебаний при известных координате повреждения и его длине определяются полярный момент инерции и параметр жесткости поперечного сечения стержня в зоне повреждения.

Выводы. Получено, что при расположении повреждения в узле колебаний собственные частоты продольных колебаний не зависят от его длины. По трем собственным частотам продольных колебаний определяются координата, длина и площадь поперечного сечения стержня в зоне повреждения. По двум собственным частотам крутильных колебаний при известных координате повреждения и его длине определяются полярный момент инерции и параметр жесткости поперечного сечения стержня в зоне повреждения. По низшей частоте изгибных колебаний по известной координате, длине, площади поперечного сечения в зоне повреждения определяется осевой момент инерции поперечного сечения стержня в этой зоне.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 17-41-020400_ра, 18-01-00150_а).

Литература

1. Gladwell G. M. L. Inverse problems in vibration. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004. (Русский перевод: Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2008. 608 с.)
2. Ильгамов М.А. Диагностика повреждений вертикальной штанги // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 5. Уфа: Гилем, 2007. С. 201–211. doi: 10.21662/uim2007.1.024
3. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
4. Khakimov A.G. Damage Diagnostics in a Vertical Rod with Concentrated Masses on the Elastic Suspender // International Journal of Mechanics and Applications. 2012. Vol. 2, № 5. P. 70–73.
5. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Отражение продольной волны от воздушной полости в трубопроводе, погруженном в вязкую жидкость // Известия Уфимского научного центра РАН. 2012. № 4. С. 15–21.
6. Ильгамов М.А. Продольные колебания стержня с зарождающимися поперечными трещинами // МТТ. 2017. № 1. С. 23–31.
7. Хакимов А.Г. О собственных колебаниях вала турбокомпрессора с искусственным дефектом // ИВУЗ. Авиационная техника. 2011. № 1. С. 71–73.
8. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений балки на шарнирных опорах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2010. № 2. С. 42–48.
9. Ахтямов А.М., Ильгамов М.А. Модель изгиба балки с надрезом: прямая и обратная задачи //

Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, №1. С. 152–162.

10. Guangming Dong and Jin Chen. Vibration analysis and crack identification of a rotor with open cracks // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. 2011. Vol. 28, № 1. P. 171–182.

11. Акопьян В.А., Черпаков А.В., Рожков Е.В., Соловьев А.Н. Интегральный диагностический признак идентификации повреждений в элементах стержневых конструкций // Контроль. Диагностика. 2012. № 7. С. 50–56.

12. Лопатников С.Л., Гама Б.А., Краутхаузер К., Джиллеспи Дж. Мл. О применимости классического анализа опытов с разрезным стержнем Гопкинсона // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 3. С. 39–46.

13. Kolsky Н. An investigation of mechanical properties of materials at very high rates of loading // Proceedings of the Physics Society of London. 1949. Vol. 62. (II-B). P. 676–700.

14. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с.

15. Прочность, устойчивость, колебания: справочник в трех томах. Т. 3 / под общ. ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение. 1968. 568 с.

References

1. Gladwell G.M.L. Inverse problems in vibration. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004. Russian edition. Moscow, Izhevsk, Regularnaya i khaoticheskaya dinamika, 2008. 608 p.
2. Ilgamov M.A. Damage detection in a vertical rod. Trudy Instituta mekhaniki Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN. Issue 5. Ufa, Gilem, 2007, pp. 201–211.
3. Vatulyan A.O. Inverse problems in deformed solid mechanics. Moscow, Fizmatlit, 2007. 224 p.
4. Khakimov A.G. Damage diagnostics in a vertical rod with concentrated masses on the elastic suspender. International Journal of Mechanics and Applications, 2012, vol. 2, no. 5, pp. 70–73.
5. Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Longitudinal wave reflection from air cavity in a pipe system. Izvestiya Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN, 2012, no. 4, pp. 15–21.
6. Ilgamov M.A. Longitudinal vibrations of a bar with incipient transverse cracks. Mechanics of Solids, 2017, no. 1, pp. 18–24.
7. Khakimov A.G. On the natural vibrations of the turbocompressor shaft with an artificial defect. Russian Aeronautics. Iz. VUZ, 2011, no. 1, pp. 71–73.
8. Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Damage diagnosis of a hinge support beam. Stroitel'naya tekhnika inzhenernykh konstruktсий i sooruzheniy, 2010, no. 2, pp. 42–48.
9. Akhtyamov A.M., Ilgamov M.A. Flexural model for a notched beam: Direct and inverse problems. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2013, vol. 54, no. 1, pp. 132–141.

10. Guangming Dong, Jin Chen. Vibration analysis and crack identification of a rotor with open cracks. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 2011, vol. 28, no. 1, pp. 171–182.

11. Akopyan V.A., Cherpakov A.V., Rozhkov E.V., Solovyev A.N. Integral diagnostic feature for identifying damage in the elements of rod constructions. *Kontrol. Diagnostika*, 2012, no. 7, pp. 50–56.

12. Lopatnikov S.L., Gama B.A., Krauthauser C., Jillespie J., Jr. Applicability of the classical analysis of experiments with split Hopkinson pressure bar.

Technical Physics Letters, 2004. vol. 30, no. 2, pp. 102–105.

13. Kolsky H. An investigation of mechanical properties of materials at very high rates of loading. *Proceedings of the Physics Society of London*, 194, vol. 62 (II-B), pp. 676–700.

14. Feodosyev V.I. *Strength of materials*. Moscow, Nauka, 1986. 512 p.

15. *Strength, stability, vibrations*. In 3 volumes. Vol 3. I.A. Birger, Ya.G. Panovko (eds). Moscow, Mashinostroenie, 1968. 568 p.

VIBRATION DIAGNOSTICS OF DAMAGE OF A ROD

© A.G. Khakimov

¹ Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Centre
of the Russian Academy of Sciences,
71, prospekt Oktybrya, 450054, Ufa, Russian Federation

Natural longitudinal, torsional and flexural oscillations of a rod with one damage are investigated. In a rod there is a short site with the smaller cross-sectional area which can be in any place on rod length. This site models his damage, in particular, the opened crack. The intense deformed state within elasticity for a thin rod is considered. The task consists in determination of coordinate of damage and its sizes, lengths and cross-sectional areas in approach of a hypothesis of flat sections on natural frequencies of longitudinal oscillations. Within damage with a short length and near it there is a difficult spatial intense deformed state. It is received that at an arrangement of damage to knot of oscillations natural frequencies of longitudinal oscillations don't depend on its length. Dependences of circular frequencies of longitudinal oscillations of a rod on the coordinate of damage have periodic character. To growth of length of the damaged site there is a reduction of the first two lowest natural frequencies of longitudinal oscillations of a rod. To growth of the relative area of the damaged site there is an increase in the first two lowest natural frequencies of longitudinal oscillations of a rod. Coordinate, length and cross-sectional area of a rod in a damage zone are determined by three natural frequencies of longitudinal oscillations. The frequency equation of torsional oscillations of a rod with the damaged site is received. With increase of parameter of rigidity cross section in a damage zone at constant value of the polar moment of inertia in this zone two lowest frequencies of natural torsional oscillations of a rod increase. And with increase in the polar moment of inertia in a damage zone at constant value of parameter of rigidity cross section in this zone two lowest frequencies of natural torsional oscillations of a rod decrease. The polar moment of inertia and parameter of rigidity of cross section of a rod in a damage zone are determined by two natural frequencies of torsional oscillations at known to the coordinate of damage and its length. The axial moment of inertia of cross section of a rod in this zone is determined by the lowest frequency of flexural oscillations on the known coordinate, length, cross-sectional area in a zone of damage. Also other options of determination of parameters of damage on natural frequencies of oscillations are specified.

Key words: rod, natural frequencies, longitudinal oscillations, torsional oscillations, flexural oscillations, damage, length of the damaged site, coordinate.