

УДК 524.882

DOI: 10.31040/2222-8349-2021-0-1-92-96

**ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА НА ЭФФЕКТ САНЬЯКА  
В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ БАРДИНА**

© Р.Х. Каримов, К.К. Нанди

Исследуется один из интереснейших эффектов, связанных с вращением астрофизических объектов – эффект Саньяка. Впервые эффект был подтвержден в лабораторных экспериментах Жоржа Саньяка с вращающимся кольцевым интерферометром в 1913 году. Позже эффект был подтвержден и в рамках Земли в эксперименте «Вокруг света», проведенном Дж. Хафеле и Р. Киттингом, в котором они дважды облетели Землю с атомными цезиевыми часами на борту и сравнили «летающие» часы со статичными часами на Земле. В результате была обнаружена ненулевая разница хода часов, что и является подтверждением эффекта Саньяка. Позже было проведено множество более точных спутниковых экспериментов по измерению эффекта Саньяка в рамках Земли. Эффект также был рассмотрен в общей теории относительности и модифицированных теориях гравитации, где было проведено множество работ по исследованию влияния таких параметров, как угловой момент, космологическая константа, скаляр Риччи и др. на эффект Саньяка. Интересной задачей является исследование влияния магнитного заряда на эффект, поскольку наиболее исследованным решением с вращением описываемой черной дыры с массой  $M$  и магнитным зарядом  $g$  является несингулярная черная дыра Бардина. В работе будет вычислен эффект Саньяка в пространстве-времени вращающейся черной дыры Бардина как для геодезических, так и для негеодезических круговых орбит источника / приемника света (предполагается, что источник и приемник света определены в одной точке). Два типа круговых орбит описывают противоположное влияние на эффект Саньяка: с увеличением магнитного заряда в случае негеодезических круговых орбит задержка Саньяка увеличивается, в случае геодезических круговых орбит задержка уменьшается. Однако чем дальше орбита источника / приемника света, тем меньше магнитный заряд влияет на задержку Саньяка. Предполагается также, что гравитация Земли и Солнца вблизи ее поверхности хорошо описывается метрикой Бардина.

Ключевые слова: эффект Саньяка, черная дыра, магнитный заряд, вращение.

**Введение.** Общая теория относительности была успешно протестирована как в приближении слабого поля с использованием тестов солнечной системы, так и в режиме сильного поля с использованием наблюдения тени сверхмассивной черной дыры в центре эллиптической галактики M87\* [1] с помощью телескопа горизонта событий (Event Horizon Telescope, EHT) и прямого обнаружения гравитационных волн от слияния черных дыр и нейтронных звезд в тесных двойных системах [2]. Несмотря на это, в общей теории относительности (далее – ОТО) существует фундаментальная проблема, связанная с точными решениями уравнений поля, содержащих физическую сингулярность. Ожидается, что проблема сингулярности будет решена с построением квантовой теории гравитации. Однако Бардин получил решение для

несингулярной черной дыры, в котором действие Эйнштейна–Гильберта связано с нелинейной электродинамикой [3]. Вращающийся аналог этого решения получен в работе [4]. Свойства регулярных решений для черных дыр, связанных с нелинейной электродинамикой, изучались в работах [5, 6]. Целью работы является исследование эффекта Саньяка в пространстве-времени вращающейся черной дыры Бардина.

Эффект Саньяка [7], названный в честь первооткрывателя Жоржа Саньяка, является одним из фундаментальных открытий в физике, связанной с вращением. Сам эффект может быть описан следующим образом. Пусть вокруг вращающегося объекта движется источник/приемник света (т.е. источник и приемник находятся в одной точке). Пучок света, разделенный на два в источнике/приемнике света,

КАРИМОВ Рамис Хамитович, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, e-mail: karimov\_ramis\_92@mail.ru

НАНДИ Камал Канти – Ph.D., Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Северо-Бенгальский университет, e-mail: kamalnandi1952@rediffmail.com

следует по одному и тому же замкнутому пути вдоль обода в противоположных направлениях до момента их схождения в источнике/приемнике. Если диск не вращается, то пучки света одновременно прибывают к источнику/приемнику, и, следовательно, появляется интерференционная полоса. Если диск вращается с некоторой угловой скоростью, время прихода к источнику/приемнику будет разным для сонаправленного и противоположно-направленного пучков света: больше в первом случае и короче во втором. Получившаяся разница во времени называется эффектом Саньяка.

Исследуемый эффект проявляется для любых волн, включая волны материи [8, 9]. Эффект Саньяка, таким образом, является свойством самой геометрии пространства-времени и не зависит от физической природы интерферирующих пучков, то есть его можно рассматривать как «универсальный» эффект.

Одними из важнейших современных применений эффекта Саньяка являются Глобальные навигационные системы, такие как GPS и ГЛОНАС, для которых необходимо учитывать вращение при использовании радиосигналов для синхронизации часов. Это свойство было использовано Алланом, Вейсом и Эшби для получения более точных измерений задержки Саньяка [10]. Аштекар и Маггон рассматривали эффект Саньяка в ОТО как гравитационный аналог эффекта Ааронова–Бома в электродинамике [11]. Тарталья рассчитал поправки к задержке, зависящие от массы и вращения в метрике черной дыры Керра [12]. В работе [13] показано, что эффект Саньяка в пространстве-времени черной дыры Керра-де Ситтера соответствует принципу Маха для геодезического движения и не соответствует для негеодезического движения источника/приемника света. В работах [14, 15] к задержке Саньяка в пространстве-времени некоторых черных дыр были применены наблюдаемые данные задержки [11] для ограничения свободных параметров метрик.

**Пространство-время Бардина.** Линейный элемент вращающейся черной дыры Бардина [4] задается в виде

$$ds^2 = - \left[ 1 - \frac{2m(r)r}{\Sigma} \right] dt^2 - \frac{4am(r)r \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \left[ r^2 + a^2 + \frac{4a^2 m(r)r \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (1)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \Delta = r^2 + a^2 - 2m(r)r,$$

$$m(r) = M * \left( \frac{r^2}{r^2 + g^2} \right)^{3/2},$$

где  $M$  – асимптотическая масса источника,  $a$  – параметр вращения и  $g$  – магнитный заряд. Поскольку теорема об «отсутствии волос» утверждает, что черная дыра не может иметь собственного магнитного поля, можно рассматривать черные дыры, как погруженные во внешнее магнитное поле.

**Эффект Саньяка в пространстве-времени для негеодезических круговых орбит.** Предположим, что источник/приемник света (геостационарный спутник), отправляющий два противоположно направленных пучка света, движется по орбите вокруг вращающейся черной дыры Бардина, описываемой метрикой (1) на экваториальной плоскости (т.е.  $\theta = \pi/2$ ). Подходящим образом расположенные зеркала возвращают оба пучка в исходное положение после кругового обхода черной дыры. Пусть источник/приемник света движется вокруг черной дыры на некотором постоянном радиусе (т.е.  $r = R$ ). Тогда метрика (1) сводится к

$$ds^2 = - \left[ 1 - \frac{2M}{R} \left( \frac{R^2}{R^2 + g^2} \right)^{3/2} \right] dt^2 - \frac{4aM}{R} \left( \frac{R^2}{R^2 + g^2} \right)^{3/2} dt d\phi + \left[ R^2 + a^2 \left\{ 1 + \frac{2MR^2}{(R^2 + g^2)^{3/2}} \right\} \right] d\phi^2. \quad (2)$$

Предполагая, что осевая скорость вращения  $\omega_0$  черной дыры Керра-Тауб-НУТ постоянна, угол вращения спутника задается уравнением

$$\phi_0 = \omega_0 t. \quad (3)$$

Тогда уравнение (2) сводится к

$$ds^2 = \left[ 1 - (R^2 + a^2)\omega_0^2 - \frac{2MR^2}{(R^2 + g^2)^{3/2}} - \times (1 - a^2\omega_0^2)^2 \right] dt^2. \quad (4)$$

Собственное время вращающегося источника/приемника света выводится из уравнения (4) с учетом уравнения (3):

$$d\tau = \left[ 1 - (R^2 + a^2)\omega_0^2 - \frac{2MR^2}{(R^2 + g^2)^{3/2}} - \times (1 - a^2\omega_0^2)^2 \right] \left( \frac{d\phi_0}{\omega_0} \right), \quad (5)$$

где  $d\phi_0 = \phi_{0+} - \phi_{0-}$ ,  $\phi_{0\pm} = \mp \frac{2\pi\omega_0}{\Omega_{\pm} - \omega_0}$  и  $\Omega_{\pm}$  – угловая скорость пучков света для движущегося вдоль (индекс «+») и против (индекс «-») направления вращения источника:

$$\Omega_{\pm} = \frac{2aMR^2 \pm \sqrt{(R^2 + a^2)(R^2 + g^2)^3 - 2MR^4(R^2 + g^2)^2}}{2a^2MR^2 + (R^2 + a^2)(R^2 + g^2)^2}, \quad (6)$$

которые представляют собой угловую скорость пучка света  $\Omega_{\pm}$  для движущегося вдоль (индекс «+») и против (индекс «-») направления вращения источника.

Таким образом, интегрируя между  $\phi_{0-}$  и  $\phi_{0+}$  и разлагая выражение в постньютоновский ряд по  $M/R$  и  $\omega_0/R$ , получаем задержку Саньяка в виде

$$\delta\tau_{Бард}^{негеод} = \delta\tau_S + 4\pi R M \omega_0 \left(1 - \frac{g^2}{R^2 + g^2}\right)^{3/2} - \frac{8\pi a M}{R} \left(1 - \frac{g^2}{R^2 + g^2}\right)^{3/2}, \quad (7)$$

где  $\delta\tau_S = 4\pi\omega_0 R^2$  – задержка Саньяка в плоском пространстве.

**Эффект Саньяка в пространстве-времени для геодезических круговых орбит.** В предыдущем параграфе рассматривался случай негеодезического движения источника/приемника света, который имел заданную угловую скорость  $\omega_0$ . Далее рассматривается движение источника/приемника света по геодезическим круговым орбитам или, по-другому, находящегося в свободном падении, т.е. угловая скорость источника/приемника света будет удовлетворять третьему закону Кеплера.

Уравнение Эйлера–Лагранжа для координаты  $r$  с учетом  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$  может быть записано в виде

$$g_{\phi\phi,r}\omega^2 + 2g_{t\phi,r}\omega + g_{tt,r} = 0, \quad (8)$$

где  $\omega = \dot{\phi}/\dot{t}$  – угловая скорость источника/приемника света. Решая уравнение (8) относительно  $\omega$ , получим

$$\omega_{\pm} = \frac{aM \pm \sqrt{M \left\{ (R^2 + g^2)^{5/2} / (R^2 - 2g^2) - 2a^2 M \right\}}}{a^2 M + (R^2 + g^2)^{5/2} / (R^2 - 2g^2)}. \quad (9)$$

Подставив выражение для угловой скорости (9) в

$$\delta\tau_{Бард}^{геод} = 4\pi R^2 \omega_{\pm}, \quad (10)$$

можно найти выражение для задержки Саньяка в пространстве-времени Бардина для геодезических круговых орбит источника/приемника света на экваториальной плоскости.

**Численные оценки задержки Саньяка в пространстве-времени Бардина для Земли и Солнца.** Предположим, что источник/приемник света движется по замкнутой круговой траектории вокруг вращающейся Земли, предполагая, что гравитация Земли (Солнца) вблизи ее поверхности (слабое гравитационное поле) описывается метрикой Бардина. Гравитационное

поле Земли уже было описано метрикой Керра в слабом поле, например, в прецессии Лензе–Тирринга, уже хорошо испытанной спутниками LAGEOS, LAGEOS II и миссиями Gravity Probe и Gravity Probe-B.

Для исследования влияния магнитного заряда  $g$  на задержку Саньяка в пространстве-времени Бардина для негеодезических круговых орбит источника/приемника света рассматриваются следующие данные Земли:  $\omega_0 = \Omega_{\oplus} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ рад/с}$ ,  $r_g = GM_{\oplus}/c^2 = 4.35 \times 10^{-3} \text{ м}$ ,  $a = a_{\oplus} = 9.81 \times 10^6 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $c = 3 \times 10^8 \text{ м/с}$ .

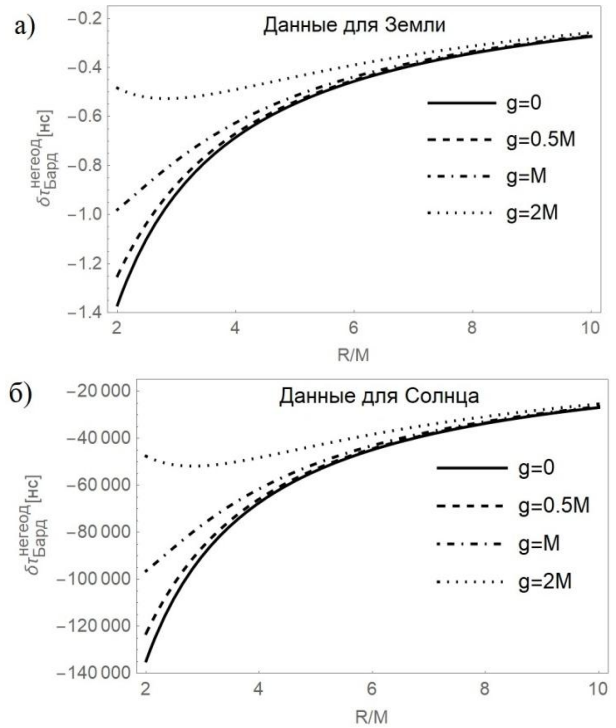


Рис. 1. График зависимости задержки Саньяка в пространстве-времени Бардина для негеодезических круговых орбит источника/приемника света в зависимости от радиуса орбиты источника/приемника света

На рис. 1 представлен график зависимости задержки Саньяка для негеодезических круговых орбит источника/приемника света в зависимости от радиуса орбиты источника/приемника света (спутника) для различных значений магнитного заряда:  $g = 0$  (случай черной дыры Керра),  $0.5M$ ,  $M$  и  $2M$ . Из рис. 1 видно, что наибольшее влияние магнитного заряда проявляется при малых радиусах, близких к горизонту событий. Отметим, что с увеличением магнитного заряда отклонение задержки Саньяка от незаряженной задержки увеличивается, и, таким образом, наибольшее отли-

чие достигается при  $g = 2M$ . При малых  $R$  величина задержки составляет от  $-1.4$  нс до  $-0.4$  нс. С учетом современных технологий такая величина является измеримой на экспериментах, и, следовательно, может быть измерена и применена к коррекции движений спутников. С увеличением радиуса орбиты источника/приемника света влияние магнитного заряда на задержку Саньяка уменьшается. Подобное поведение задержки наблюдается для Солнца с данными:  $\omega_0 = \Omega_\odot = 2.692 \times 10^{-6}$  рад/с,  $r_g = GM_\odot/c^2 = 1.48 \times 10^3$  м,  $a = a_\odot = 3.217 \times 10^3$  м<sup>2</sup>/с. Отметим, что задержка Саньяка в случае Солнца в  $10^5$  больше, чем в случае Земли.

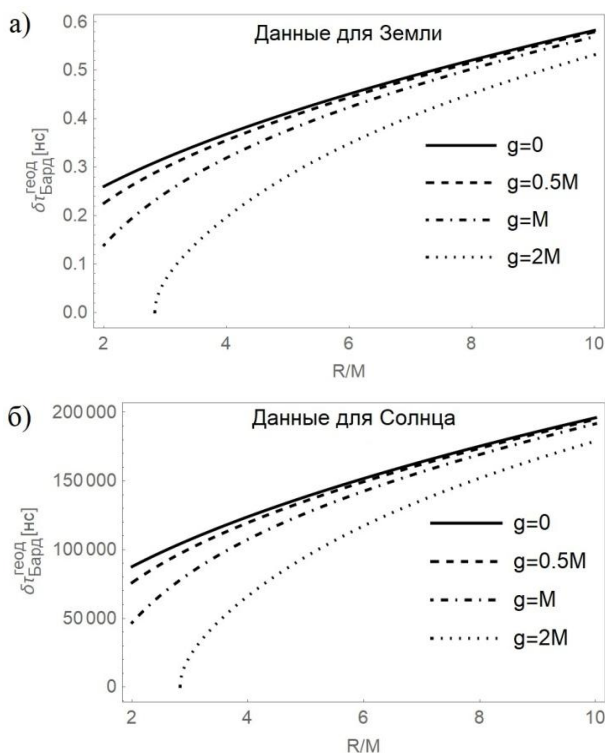


Рис. 2. График зависимости задержки Саньяка в пространстве-времени Бардина для геодезических круговых орбит источника/приемника света в зависимости от радиуса орбиты источника/приемника света

На рис. 2 представлен график зависимости задержки Саньяка для геодезических круговых орбит источника/приемника света в зависимости от радиуса орбиты источника/приемника света (спутника) для различных значений магнитного заряда:  $g = 0, 0.5M, M$  и  $2M$ . Отметим, что в отличие от задержки Саньяка для негеодезических орбит, здесь с увеличением магнитного заряда отклонение задержки Саньяка от незаряженной задержки уменьшается.

**Заключение.** В работе был исследован эффект Саньяка в пространстве-времени вращающейся черной дыры Бардина как для геодезических, так и для негеодезических круговых орбит источника/приемника света. Из предположения, что гравитация Земли (Солнца) вблизи ее поверхности описывается метрикой Бардина, было исследовано влияния магнитного заряда на задержку. Показано, что задержка Саньяка увеличивается с увеличением магнитного заряда в случае негеодезических круговых орбит и уменьшается в случае геодезических круговых орбит. Таким образом, два типа движений источника/приемника света приводит к противоположным результатам. Подобное поведение задержки Саньяка было обнаружено для метрики Керра-де Ситтера [13].

### Литература

1. Akiyama K. et al. (Event Horizon Telescope) First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole // *Astrophys. J. Lett.* 2019. Vol. 875. P. L1.
2. Abbott B.P. et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger // *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 116, P. 061102.
3. Bardeen J.M. Non-singular general-relativistic gravitational collapse // *Proceedings of International Conference GR5 / Tbilisi, USSR.* 1968. P. 174.
4. Bambi C., Modesto L. Rotating regular black holes // *Phys. Lett. B.* 2016. Vol. 721. P. 329-334.
5. Toshmatov B., Abdujabbarov A., Stuchlík Z., Ahmedov B. Quasinormal modes of test fields around regular black holes // *Phys. Rev. D.* 2015. Vol. 91. P. 083008.
6. Dymnikova I., Galaktionov E. Regular rotating electrically charged black holes and solitons in non-linear electrodynamics minimally coupled to gravity // *Class. Quantum Grav.* 2015. Vol. 32. P. 165015.
7. Sagnac G. The luminiferous ether demonstrated by the effect of the relative motion of the ether in an interferometer in uniform rotation // *C. R. Acad. Sci. Paris.* 1913. Vol. 157. P. 708-710.
8. Zimmermann J.E., Mercereau J.E. Compton Wavelength of Superconducting Electrons // *Phys. Rev. Lett.* 1965. Vol. 14. P. 887-888.
9. Riehle F., Kisters Th., Witte A., Helmcke J., Borde Ch.J. Optical Ramsey spectroscopy in a rotating frame: Sagnac effect in a matter-wave interferometer // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 67. P. 177-180.
10. Allan D.W., Weiss M.A., Ashby N. Around-the-World Relativistic Sagnac Experiment // *Science.* 1985. Vol. 228. P. 69-70.
11. Ashtekar A., Magnon A. The Sagnac effect in general relativity // *J. Math. Phys.* 1975. Vol. 16. P. 341-344.

12. Tartaglia A. General relativistic corrections to the Sagnac effect // *Phys. Rev. D*. 1998. Vol. 58. P. 064009.

13. Karimov R.Kh., Izmailov R.N., Garipova G.M., Nandi K.K. Sagnac delay in the Kerr-dS spacetime: Implications for mach's principle // *Eur. Phys. J. Plus*. 2018. Vol. 133. P. 44.

14. Kulbakova A., Karimov R.Kh., Izmailov R.N., Nandi K.K. Upper limit on NUT charge from the observed terrestrial Sagnac effect *Class. Quantum Grav.* 2018. Vol. 35. P. 115014.

15. Камалова Д.Ю., Давлетшина Н.Ю., Байбулова Г.Б., Каримов Р.Х. Эффект Саньяка в пространстве-времени Йохансена-Псалтиса // *Инженерная физика*. 2019. № 7. С. 27–30.

### References

1. Akiyama K. et al. (Event Horizon Telescope) First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The shadow of the supermassive black hole. *Astrophys. J. Lett.*, 2019, vol. 875, p. L1.

2. Abbott B.P. et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 2016, vol. 116, p. 061102.

3. Bardeen J.M. Non-singular general-relativistic gravitational collapse. *Proceedings of International Conference GR5. Tbilisi, USSR, 1968*, p. 174.

4. Bambi C., Modesto L. Rotating regular black holes. *Phys. Lett. B*, 2016, vol. 721, p. 329–334.

5. Toshmatov B., Abdujabbarov A., Stuchlík Z., Ahmedov B. Quasinormal modes of test fields around regular black holes. *Phys. Rev. D*, 2015, vol. 91, p. 083008.

6. Dymnikova I., Galaktionov E. Regular rotating electrically charged black holes and solitons in non-linear electrodynamics minimally coupled to gravity. *Class. Quantum Grav.*, 2015, vol. 32, p. 165015.

7. Sagnac G. The luminiferous ether demonstrated by the effect of the relative motion of the ether in an interferometer in uniform rotation. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1913, vol. 157, pp. 708–710.

8. Zimmermann J.E., Mercereau J.E. Compton wavelength of superconducting electrons // *Phys. Rev. Lett.* 1965. Vol. 14. P. 887–888.

9. Riehle F., Kisters Th., Witte A., Helmcke J., Borde Ch.J. Optical Ramsey spectroscopy in a rotating frame: Sagnac effect in a matter-wave interferometer // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 67. P. 177–180.

10. Allan D.W., Weiss M.A., Ashby N. Around-the-World Relativistic Sagnac Experiment // *Science*. 1985. Vol. 228. P. 69–70.

11. Ashtekar A., Magnon A. The Sagnac effect in general relativity // *J. Math. Phys.* 1975. Vol. 16. P. 341–344.

12. Tartaglia A. General relativistic corrections to the Sagnac effect // *Phys. Rev. D*. 1998. Vol. 58, P. 064009.

13. Karimov R.Kh., Izmailov R.N., Garipova G.M., Nandi K.K. Sagnac delay in the Kerr-dS spacetime: Implications for Mach's principle // *Eur. Phys. J. Plus*. 2018. Vol. 133. P. 44.

14. Kulbakova A., Karimov R.Kh., Izmailov R.N., Nandi K.K. Upper limit on NUT charge from the observed terrestrial Sagnac effect *Class. Quantum Grav.* 2018. Vol. 35. P. 115014.

15. Kamalova D.Yu., Davletshina Y.Yu., Baybulova G.B., Karimov R.Kh. Sagnac effect in Johansen-Psaltis spacetime. *Inzhenernaya fizika*, 2019, no. 7, pp. 27–30.

## INFLUENCE OF MAGNETIC CHARGE ON THE SAGNAC EFFECT IN THE BARDEEN SPACETIME

© R.Kh. Karimov<sup>1</sup>, K.K. Nandi<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Akmullah Bashkir State Pedagogical University,  
3a, ulitsa Ojkyabrskoy Revolutsii, 450008, Ufa, Russian Federation

<sup>2</sup> University of North Bengal,  
Raja Rammohanpur, Darjeeling, 734 013, WB, India

This paper investigates one of the most interesting effects associated with the rotation of astrophysical objects (the Sagnac effect). The effect was first confirmed in laboratory experiments by Georges Sagnac with a rotating ring interferometer in 1913. Later, the effect was also confirmed within the framework of the Earth in the "Around-the-World" experiment conducted by J. Hafele and R. Kitting, in which they twice circled the Earth with an atomic cesium clock on board and compared the "flying" clock with those remaining static on the Earth. As a result, a non-zero difference in the clock rate was found as a confirmation of the Sagnac effect. Subsequently, more precise satellite experiments have been carried out to measure the Sagnac effect within the Earth. The effect was also considered in general relativity and modified theories of gravity, where many works were carried out to study the influence of such parameters as angular momentum, cosmological constant, Ricci scalar, etc. on the Sagnac effect. An interesting task is to study the influence of a magnetic charge on the effect, since the solution with rotation described by a black hole with mass  $M$  and magnetic charge  $g$  is the Bardeen nonsingular black hole. The work will calculate the Sagnac effect in the space-time of the rotating Bardeen black hole for both geodesic and non-geodesic circular orbits of the light source / receiver (assuming that the light source and receiver are defined at the same point). Two types of circular orbits describe the opposing influence on the Sagnac effect: the Sagnac delay increases with an increase in the magnetic charge in the case of non-geodesic circular orbits and decreases in the case of geodesic circular orbits. However, the farther is the orbit of the light source / receiver, the less the magnetic charge affects the Sagnac delay. It is also assumed that the gravity of the Earth and the Sun near the surface is well described by the Bardeen metric.

Key words: Sagnac effect, black hole, magnetic charge, rotation.