

УДК 524.88

DOI: 10.31040/2222-8349-2021-0-1-33-38

**ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ КРОВОЙ НОРЫ
ШВАРЦШИЛЬДА–ДАМУРА–СОЛОДУХИНА**

© Г.Ф. Ахтарьянова, Г.И. Низаева, Р.Н. Измаилов

Уравнения общей теории относительности – это нелинейные уравнения второго порядка в частных производных и, как следствие, получение точных решений является сложной проблемой. Одним из решений этой проблемы является получение моделей тонкой самогравитирующей оболочки. Данный метод используется при изучении большинства явлений в теории гравитации, где обратное влияние материи на геометрию пространства-времени является ключевым фактором. Еще одной интересной проблемой, для изучения которой можно применять метод тонких оболочек, является «имитация» черной дыры. Рассмотрим систему, состоящую из сферически-симметричной черной дыры Шварцшильда и окружающей ее тонкой оболочки, расположенной на некотором фиксированном расстоянии от черной дыры. С точки зрения гравитационной физики, наблюдатель на бесконечности не в состоянии отличить реальную черную дыру от кротовой норы с тонкой оболочкой, в которой выполнено условие имитации. Имитация черной дыры возможна только при достаточно жестких условиях на параметры модели. В частности, оболочку необходимо удерживать на фиксированном радиусе. В общем случае такое движение оболочки негеодезично, и необходимы внешние силы для ее удержания. Радиус оболочки является также параметром, который определяет возможность/невозможность имитации. В работе найден радиус для случая черной дыры Шварцшильда. В частности, в работе рассматривается модель кротовой норы, полученной в результате сшивки двух пространств-времен: черной дыры Шварцшильда и кротовой норы Дамура–Солодухина. Это решение отличается от черной дыры Шварцшильда параметром безразмерного реального отклонения λ и представляет собой дважды асимптотически плоское регулярное пространство-время. Показано, что они могут быть сшиты по заданному радиусу. В результате образуется тонкая оболочка между двумя сшитыми многообразиями, состоящая из экзотической материи. Рассмотрены случаи, когда тонкая оболочка будет стабильной. Рассматривается ограничение по «массе» и по «силе», при этом ограничение по «силе» строже, чем ограничение по «массе».

Ключевые слова: кротовые норы, черные дыры, анализ стабильности.

Введение. Общая теория относительности (ОТО) Эйнштейна, последовательно объясняющая силы гравитации искривлением пространства-времени, допускает существование более сложных топологических конфигураций пространства-времени. В 1916 г. Фламм [1] высказал предположение, что наша Вселенная может быть неодносвязной, и могут существовать туннели, называемые сейчас кротовыми норами, соединяющие отдаленные области одной Вселенной или даже соединяющие разные Вселенные. Лишь в 1988 г. Моррис и Торн [2] выдвинули гипотезу, что кротовые норы могут

быть проходимыми. Условием существования проходимых Лоренцевых кротовых нор как решений уравнений ОТО является наличие экзотической материи, обладающей отрицательным давлением и нарушающей нулевое энергетическое условие [3, 4]. Тем не менее существует несколько подходов к построению физических моделей кротовых нор. Известно, что некоторые квантовые эффекты могут нарушать энергетические условия, например, эффект Казимира [2] и в таких решениях радиус горловины кротовой норы, как правило, планковских масштабов. Другой подход заключается

АХТАРЬЯНОВА Гульназ Фанисовна, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, e-mail: Akht_gul@mail.ru

НИЗАЕВА Гульназ Ильгизовна, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, e-mail: nizaeva1997@mail.ru

ИЗМАИЛОВ Рамиль Наильевич – к.ф.-м.н, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, e-mail: izmailov.ramil@gmail.com

в использовании гипотетических форм материи с экзотическими свойствами. Например, решение вида кротовой норы, поддерживаемой фантомным скалярным полем, найдено еще в 1973 г. независимо друг от друга Эллисом и Бронниковым [5, 6]. Также известны модели кротовых нор с фантомной энергией [7] и др. Стоит отметить естественное стремление минимизировать использование экзотической материи, благодаря которому появились модели кротовых нор с тонкими оболочками (КНТО) [8–10]. Интерес к подобным решениям резко возрос в связи с недавним открытием того, что КНТО могут имитировать недавно наблюдаемые квазинормальные моды затухающих гравитационных волн, которые, как считается, характерны исключительно для горизонта черных дыр [11–12]. Следовательно, получение модели КНТО и изучение ее стабильности имеет большое значение для понимания природы компактных астрофизических объектов. В работе получена модель кротовой норы путем сшивки методом Гарсия, Лобо и Виссера (ГЛВ) [13], метрики кротовой норы Дамура–Солодухина и черной дыры Шварцшильда.

Формализм Гарсия–Лобо–Виссера. В работе будет использован формализм ГЛВ [13] для сшивки двух пространств-времен. Рассмотрим два пространственно-временных многообразия, \mathcal{M}_+ и \mathcal{M}_- , с метриками, заданными в виде $g_{\mu\nu}^+(x_\pm^\mu)$ и $g_{\mu\nu}^-(x_\pm^\mu)$, в терминах независимо определенных систем координат x_\pm^μ и x_\pm^μ . Единое многообразие \mathcal{M} получается путем сшивки двух многообразий \mathcal{M}_+ и \mathcal{M}_- , т.е. $\mathcal{M} = \mathcal{M}_+ \cup \mathcal{M}_-$ на их границах. Следовательно, граница пересечения этих многообразий должна быть $\Sigma = \Sigma_+ = \Sigma_-$, где Σ_+ и Σ_- – область пересечения многообразий \mathcal{M}_+ и \mathcal{M}_- .

Рассмотрим общий вид двух статических сферически-симметричных пространств-времен, заданных следующими линейными элементами:

$$ds^2 = -e^{2\Phi_\pm(r_\pm)} \left[1 - \frac{b_\pm(r_\pm)}{r_\pm} \right] dt_\pm^2 + \left[1 - \frac{b_\pm(r_\pm)}{r_\pm} \right]^{-1} dr_\pm^2 + r_\pm^2 (d\theta_\pm^2 + \sin^2 \theta_\pm^2 d\varphi_\pm^2) \quad (1)$$

на \mathcal{M}_\pm , соответственно.

Данный метод позволяет сшивать два произвольных сферически симметричных пространства-времени, используя процедуру «вы-

резать и вставить». Единое многообразие \mathcal{M} получается путем сшивки двух сферически симметричных многообразий \mathcal{M}_+ и \mathcal{M}_- по времениподобной переходной поверхности Σ , т.е., по $f(r, \tau) = r - a(\tau) = 0$. Тензор энергии-импульса может быть описан в членах плотности энергии поверхности σ и поверхностном давлении P как $S_{ij} = \text{diag}(-\sigma, P, P)$. Из формализма ГЛВ следует обобщенный закон сохранения:

$$\frac{d(\sigma A)}{d\tau} + P \frac{dA}{d\tau} = \Xi A \dot{a}, \quad (2)$$

где $\dot{a} = \frac{da}{d\tau}$, площадь поверхности оболочки $A = 4\pi a^2$, и

$$\Xi = \frac{1}{4\pi a} \left[\Phi'_+(a) \sqrt{1 - \frac{b_+(a)}{a} + \dot{a}^2} - \Phi'_-(a) \sqrt{1 - \frac{b_-(a)}{a} + \dot{a}^2} \right]. \quad (3)$$

Первый член в уравнении (2) описывает изменение внутренней энергии тонкой оболочки, второй член описывает работу, выполняемую внутренними силами тонкой оболочки. Правая часть уравнения описывает неоднородность в законе сохранения для напряжений поверхности потока импульса многообразия и физическая интерпретация состоит в действии внешних сил на оболочку. Другими словами, член «внешняя сила» возникает вследствие $\Phi'_\pm \neq 0$. Только при $\Phi'_\pm = 0$ имеем $\Xi = 0$ и получаем известный закон сохранения для оболочки кротовой норы.

Допуская интегрируемость σ [13], что следует из $\sigma = \sigma(a)$, можно определить массу тонкой оболочки, состоящей из экзотической материи в горловине кротовой норы как [14]

$$m_s(a) = 4\pi\sigma(a)a^2. \quad (4)$$

Метод ГЛВ содержит неравенства, описывающие стабильность вблизи статичного радиуса a_0 [13], которые возникают из ограничений по массе

$$\left[\frac{m_s(a)}{a} \right]'' \Big|_{a_0} \geq \frac{1}{4} \left[\frac{\left\{ \left(\frac{b_+(a)}{a} \right) \right\}^2}{\left\{ 1 - \frac{b_+(a)}{a} \right\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{\left\{ \left(\frac{b_-(a)}{a} \right) \right\}^2}{\left\{ 1 - \frac{b_-(a)}{a} \right\}^{\frac{3}{2}}} \right] \Big|_{a_0} + \frac{1}{2} \left[\frac{\left(\frac{b_+(a)}{a} \right)''}{\sqrt{1 - \frac{b_+(a)}{a}}} + \frac{\left(\frac{b_-(a)}{a} \right)''}{\sqrt{1 - \frac{b_-(a)}{a}}} \right] \Big|_{a_0}. \quad (5)$$

В случае $\Phi'_\pm \geq 0$, возникает ограничение на «внешнюю силу»

$$\begin{aligned}
 & [4\pi\Xi(a)a]''|_{a_0} \leq \left[\Phi_+'''(a)\sqrt{1-b_+(a)/a} \right. \\
 & \quad \left. + \Phi_-'''(a)\sqrt{1-b_-(a)/a} \right]_{a_0} \\
 & - \left[\Phi_+''(a) \frac{(b_+(a)/a)'}{\{1-b_+(a)/a\}^{3/2}} \right. \\
 & \quad \left. + \Phi_-''(a) \frac{(b_-(a)/a)'}{\sqrt{1-b_-(a)/a}} \right]_{a_0} \\
 & - \frac{1}{4} \left[\Phi_+'(a) \frac{\{(b_+(a)/a)\}^2}{\sqrt{1-b_+(a)/a}} \right. \\
 & \quad \left. + \Phi_-'(a) \frac{\{(b_-(a)/a)\}^2}{\sqrt{1-b_-(a)/a}} \right]_{a_0} \\
 & - \frac{1}{2} \left[\Phi_+'(a) \frac{(b_+(a))''}{\sqrt{1-b_+(a)/a}} + \Phi_-'(a) \frac{(b_-(a))''}{\sqrt{1-b_-(a)/a}} \right]_{a_0}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

В случае при $\Phi_{\pm}' < 0$ знак неравенства меняется на противоположный. Ограничение по силе исчезает при $\Phi_{\pm}' = 0$.

Кротовая нора Дамура–Солодухина.

Интерес к кротовым норам возрос после того, как стало понятно, что они могут имитировать спектр начальных квазинормальных мод после слияния. Эта возможность кротовых нор была впервые предложена Дамуром и Солодухиным [14]. Это пример кротовой норы без горизонта, более известной как кротовая нора Дамура–Солодухина, отличается от черной дыры Шварцшильда параметром безразмерного реального отклонения λ и представляет собой дважды асимптотически плоское регулярное пространство-время, соединенное горловиной.

Метрика кротовой норы Дамура–Солодухина имеет следующий вид:

$$ds^2 = -(f(r) + \lambda^2)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \tag{7}$$

где $f(r) = 1 - 2M/r$, $\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. При $\lambda = 0$ решение сводится к обычной метрике черной дыры Шварцшильда. Радиус горловины кротовой норы Дамура–Солодухина $r_{th} = 2M$.

Параметры гравитационного линзирования в сильном поле для кротовой норы Дамура–Солодухина были исследованы в [15], где было показано, насколько должны быть малы значения параметра отклонения λ для того, чтобы наблюдательно совпадать с черной дырой Шварцшильда.

Анализ стабильности модели кротовой норы Шварцшильда–Дамура–Солодухина. Преобразовав метрику Шварцшильда в форму ГЛВ уравнения (1), получаем

$$b_- = 2M_{Sch}, \Phi_- = 0, \tag{8}$$

и подобным же образом преобразовав метрику Дамура–Солодухина (7), получим

$$b_+ = 2M_{DS}, \Phi_+ = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{r\lambda^2}{r-2M_{DS}} \right] \tag{9}$$

Для того, чтобы использовать формализм ГЛВ, необходимо выяснить знак Φ_{\pm}' . Поскольку $\Phi_- = 0$, то нужно рассмотреть только функцию Φ_+ . Производная функции Φ_+ по r имеет вид

$$\Phi_+' = -\frac{M_{DS}\lambda^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M_{DS}}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{2M_{DS}}{r} + \lambda^2\right)^{-1}. \tag{10}$$

Поскольку рассматриваются радиусы только $r > r_{th} = 2M_{DS}$, то легко доказать, что $\Phi_+' < 0$.

Подставим функции (8) и (9) в уравнения (5) и (6) и получим ограничение «массы» и «внешней силы» на тонкую оболочку кротовой норы:

$$a_0 m_s''(a_0) \geq f(x, y) = x^2 \left[\frac{1}{(1-2x)^{3/2}} + \frac{y^2}{(1-2xy)^{3/2}} \right], \tag{11}$$

$$a_0^3 [4\pi\Xi(a)a]''|_{a_0} \geq g(x, y, \lambda) = \frac{xy\lambda^2 \{\psi_0(x, y) + \psi_1(x, y)\lambda^2 + \psi_2(x, y)\lambda^4\}}{(1-2xy)^{5/2}(1-2xy+\lambda^2)^3}, \tag{12}$$

где $x = \frac{M_{Sch}}{a_0}$, $y = \frac{M_{DS}}{M_{Sch}}$,

$$\begin{aligned}
 \psi_0(x, y) &= 3(1-2xy)^2(2-2xy+x^2y^2), \\
 \psi_1(x, y) &= 2(1-2xy)(6-12xy+5x^2y^2), \\
 \psi_2(x, y) &= 3(2-6xy+5x^2y^2).
 \end{aligned}$$

Поскольку r должен быть больше $2M_{Sch}$, то $x \in (0, 1/2)$ и из уравнений (11) и (12) следует, что $y \in (0, 1)$. Таким образом, масса кротовой норы Дамура–Солодухина не может быть больше, чем масса черной дыры Шварцшильда.

На рис. 1 представлен контурный график зависимости функции $f(x, y)$ от x и y в заданных диапазонах. Из рис. 1 видно, что тонкая оболочка является стабильной при $x < 0.45$. Следовательно, при значениях радиуса шивки кротовой норы $a_0 > 2.22 M_{Sch}$ кротовая нора стабильна. Однако если радиус шивки определен на интервале $2 M_{Sch} < a_0 < 2.22 M_{Sch}$, то кротовая нора коллапсирует. Стабильность тонкой оболочки уменьшается с увеличением y . Это означает, что наименьшая область стабильности тонкой оболочки достигается при $M_{DS} = M_{Sch}$. С увеличением отношения массы черной дыры Шварцшильда к массе кротовой норы Дамура–Солодухина область стабильности тонкой оболочки увеличивается.

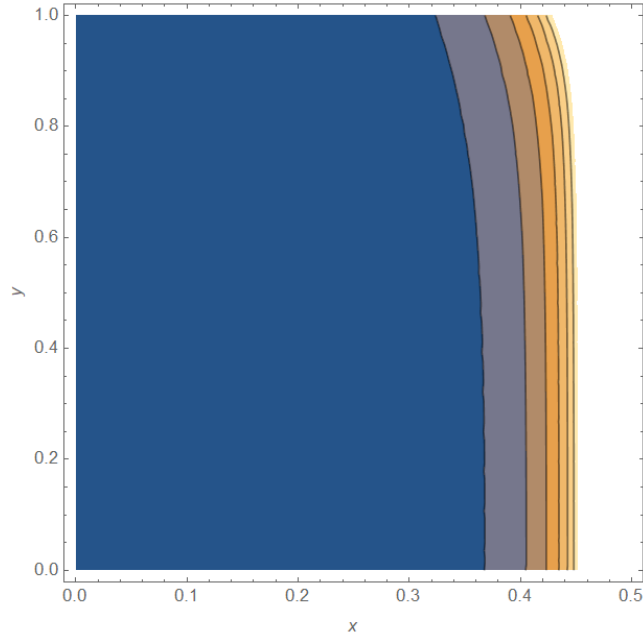


Рис. 1. Двумерный контурный график функции $f(x, y)$ в зависимости от x и y

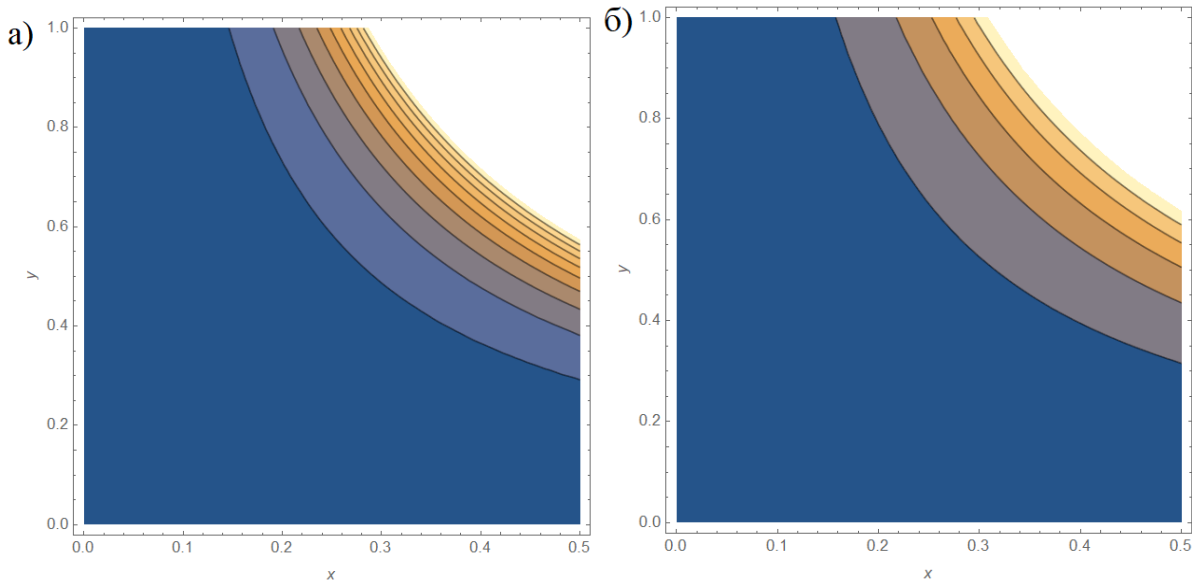


Рис. 2. Двумерный контурный график функции $g(x, y, \lambda)$ в зависимости от x и y при различных значениях λ : $\lambda = 0.1$ (а); $\lambda = 1$ (б)

На рис. 2 представлен график зависимости функции $g(x, y, \lambda)$ от x и y при значениях $\lambda = 0.1$ (рис. 2, а) и $\lambda = 1$ (рис. 2, б). Из рис. 2, а видно, что тонкая оболочка является полностью стабильной при $x < 0.3$ и $y < 0.55$. Отметим, что представленная на рис. 2, а область стабильности тонкой оболочки, вызванная ограничением «силы», является более строгой по сравнению с ограничением «массы». Как и в предыдущем случае, наименьшая стабильность тонкой оболочки возникает при $M_{DS} = M_{Sch}$ и, с увеличением отношения M_{Sch} к M_{DS} , область стабильно-

сти тонкой оболочки монотонно увеличивается. Отметим, что при увеличении параметра λ стабильность тонкой оболочки также увеличивается, что явно отражено на рис. 2, а и 2, б.

Заключение. В работе были проанализированы физические свойства и характеристики модели кротовой норы с тонкой оболочкой с внешним пространством-временем Шварцшильда. Причина выбора пространства-времени Шварцшильда в том, что оно является самым простым и хорошо обсуждаемым, особенно в контексте

существования черной дыры в центре галактики. С другой стороны существуют такие кротовые норы, которые являются практически неотличимыми от черной дыры Шварцшильда. Примером такой кротовой норы является хорошо изученная кротовая нора Дамура–Солодухина.

В результате анализа стабильности тонкой оболочки было показано, что рассматриваемая оболочка полностью стабильна, когда радиус сшивки $a_0 > 3.33 M_{Sch}$ и $M_{Sch}/M_{DS} > 1.18$. В противном случае тонкая оболочка является нестабильной. С увеличением параметра λ область стабильности также увеличивается. Отметим, что ограничение по «силе» сильнее, чем ограничение по «массе».

Литература

1. Flamm L. Linking conditions for models with geometrical basis // *Phys. Z.* 1916. V. 17. P. 448–454.
2. Morris M.S., Thorne K.S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity // *Am. J. Phys.* 1988. V. 56. P. 395–412.
3. Hochberg D., Visser M. Geometric structure of the generic static traversable wormhole throat // *Phys. Rev. D.* 1997. V. 56. P. 4745–4755.
4. Visser M. Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking // *American Institute of Physics.* 1995. 412 p.
5. Ellis H. Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity // *J. Math. Phys.* 1973. V. 14. P. 104–118.
6. Bronnikov K.A. Scalar-tensor theory and scalar charge // *Acta Phys. Polonica B.* 1973. V. 4. P. 251–266.
7. Sushkov S.V. Wormholes supported by a phantom energy // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 71. P. 043520.
8. Visser M. Traversable wormholes from surgically modified Schwarzschild spacetime // *Nucl. Phys. B.* 1989. V. 328. P. 203–212.
9. Khaybullina A., Akhtaryanova G., Mingazova R., Saha D., Izmailov R. Stability of the thin-shell Schwarzschild-Ellis wormhole // *Int. J. Theor. Phys.* 2014. V. 53. P. 1590–1600.
10. Lukmanova R., Khaibullina A., Izmailov R., Yanbekov A., Karimov R., Potapov A.A. Note on the Schwarzschild-Phantom wormhole // *Indian J. Phys.* 2016. V. 90. P. 1319–1323.
11. Cardoso V., Franzin E., Pani P. Is the gravitational-wave ringdown a probe of the event horizon? // *Phys. Rev. Lett.* 2016. V. 116. P. 171101.
12. Nandi K.K., Izmailov R.N., Yanbekov A.A., Shayakhmetov A.A. Ring-down gravitational waves and lensing observables: How far can a wormhole mimic those of a black hole? // *Phys. Rev. D.* 2017. V. 95. P. 104011.
13. Garcia M., Lobo F.S.N., Visser M. Generic spherically symmetric dynamic thin-shell traversable

wormholes in standard general relativity // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 86. P. 044026.

14. Damour T., Solodukhin S.N. Wormholes as black hole foils // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 76. P. 024016.

15. Nandi K.K., Izmailov R.N., Zhdanov E.R., Bhattacharya A. Strong field lensing by Damour-Solodukhin wormhole // *JCAP.* 2018. № 07. P. 027.

References

1. Flamm L. Linking conditions for models with geometrical basis. *Phys. Z.*, 1916, vol. 17, pp. 448–454.
2. Morris M.S., Thorne K.S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.*, 1988, vol. 56, pp. 395–412.
3. Hochberg D., Visser M. Geometric structure of the generic static traversable wormhole throat. *Phys. Rev. D.*, 1997, vol. 56, pp. 4745–4755.
4. Visser M. Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking. *American Institute of Physics*, New York. 1995. 412 p.
5. Ellis H. Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity. *J. Math. Phys.*, 1973, vol. 14, pp. 104–118.
6. Bronnikov K.A. Scalar-tensor theory and scalar charge. *Acta Phys. Polonica B*, 1973, vol. 4, pp. 251–266.
7. Sushkov S.V. Wormholes supported by a phantom energy. *Phys. Rev. D*, 2005, vol. 71, pp. 043520.
8. Visser M. Traversable wormholes from surgically modified Schwarzschild spacetime. *Nucl. Phys. B*, 1989, vol. 328, pp. 203–212.
9. Khaybullina A., Akhtaryanova G., Mingazova R., Saha D., Izmailov R. Stability of the thin-shell Schwarzschild-Ellis wormhole. *Int. J. Theor. Phys.*, 2014, vol. 53, pp. 1590–1600.
10. Lukmanova R., Khaibullina A., Izmailov R., Yanbekov A., Karimov R., Potapov A.A. Note on the Schwarzschild-Phantom wormhole. *Indian J. Phys.*, 2016, vol. 90, pp. 1319–1323.
11. Cardoso V., Franzin E., Pani P. Is the gravitational-wave ringdown a probe of the event horizon? *Phys. Rev. Lett.*, 2016, vol. 116, pp. 171101.
12. Nandi K.K., Izmailov R.N., Yanbekov A.A., Shayakhmetov A.A. Ring-down gravitational waves and lensing observables: How far can a wormhole mimic those of a black hole? *Phys. Rev. D*, 2017, vol. 95, pp. 104011.
13. Garcia M., Lobo F.S.N., Visser M. Generic spherically symmetric dynamic thin-shell traversable wormholes in standard general relativity. *Phys. Rev. D*, 2012, vol. 86, pp. 044026.
14. Damour T., Solodukhin S.N. Wormholes as black hole foils. *Phys. Rev. D*, 2007, vol. 76, pp. 024016.
15. Nandi K.K., Izmailov R.N., Zhdanov E.R., Bhattacharya A. Strong field lensing by Damour-Solodukhin wormhole. *JCAP*, 2018, no. 07, p. 027.



STABILITY ANALYSIS OF SCHWARZSCHILD-DAMOUR-SOLODUKHIN WORMHOLE

© G.F. Akhtaryanova, G.I. Nizaeva, R.N. Izmailov

Akmullah Bashkir State Pedagogical University,
3a, ulitsa Oktyabrskoy revolyutsii, 450008, Ufa, Russian Federation

The equations of general relativity are nonlinear second-order partial differential equations, and, as a consequence, obtaining the exact solutions is a difficult problem. One of the solutions to this problem is to obtain models with a thin self-gravitating shell. This method is used to study most of the phenomena in the theory of gravity, where the reverse effect of matter on the geometry of space-time is a key factor. Another interesting problem that can be studied using the thin shell method is the «simulation» of a black hole. Consider a system consisting of a spherically symmetric Schwarzschild black hole and a thin shell surrounding it, located at a certain fixed distance from the black hole. From the viewpoint of gravitational physics, an observer at infinity is unable to distinguish a real black hole from a wormhole with a thin shell, in which the simulation condition is satisfied. Simulation of a black hole is possible only under sufficiently stringent conditions for the parameters of the model. In particular, the shell needs to be held at a fixed radius. In the general case, such a movement of the shell is non-geodesic, and external forces are required to hold it. The radius of the shell is also a parameter that determines the possibility / impossibility of simulation. In this paper, the radius is found for the case of a Schwarzschild black hole. In particular, the paper considers a model of a wormhole obtained as a result of gluing two space-times: a Schwarzschild black hole and a Damour–Solodukhin wormhole. The latter solution differs from the Schwarzschild black hole in the parameter of the dimensionless real deviation λ and is a twice asymptotically flat regular space-time. It is shown that they can be glued along a given radius. As a result, a thin shell is formed between two glued manifolds consisting of exotic matter. Cases are considered when the thin shell is stable. It turns out that zones corresponding to the «force» constraint are more restrictive than those corresponding to the «mass» constraint.

Key words: wormhole, black holes, stability analysis.