

УДК 534-16

DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-4-19-24

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА ИЗМЕНЕНИЯ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ  
ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ КОЛЕБАНИЙ**

© И.М. Утяшев, А.А. Аитбаева, А.А. Юлмухаметов

Приведены решения прямой и обратной задач о продольных колебаниях стержня с переменной площадью поперечного сечения. Закон изменения площади сечения моделируется в виде экспоненциальной функции от многочлена степени  $n$ . Метод реконструкции данной функции основан на представлении фундаментальной системы решений прямой задачи в виде ряда Маклорена по переменным  $x$  и  $\lambda$ . Представлены примеры решения для различных функций сечения и различных краевых условий. Показано, что для восстановления  $n$  неизвестных коэффициентов многочлена требуется  $n$  собственных значений, причем решение двойственно. Однозначное решение получено только для случая упругого закрепления на одном из концов стержня. С помощью «зашумления» входных данных произведена численная оценка погрешности метода. Показано, что погрешность нахождения переменной площади сечения менее 1% при погрешности собственных значений продольных колебаний не более 0.0001.

Ключевые слова: стержень, собственные значения, задача Штурма–Лиувилля, обратная задача, переменное сечение, продольные колебания, полином.

**Введение.** Стержни различной конфигурации являются элементами многих конструкций и машин, поэтому получила широкое развитие акустическая и вибрационная диагностика таких деталей [1–4]. Задача определения собственных частот колебаний стержней с переменной площадью сечения хорошо изучена. Как правило, такие стержни моделируются в виде ступенчатых стержней [5], т.е. стержень состоит из двух и более частей с различными диаметрами или в виде конического стержня [6]. В настоящей работе предлагается описывать площадь сечения в виде функции от продольной координаты. Кроме прямой задачи, предлагается решить и обратную задачу, т.е. определить закон изменения площади сечения по собственным частотам колебаний. Так как площадь сечения входит в уравнение колебания, то рассматриваемая постановка относится к обратным коэффициентным задачам. В [2] исследуются собственные продольные, крутильные и изгибные колебания стержня с одним повреждением. В стержне имеется короткий участок с меньшей

площадью поперечного сечения, который может быть в любом месте по длине стержня. Этот участок моделирует повреждение, в частности, раскрытую трещину. Получено, что при расположении повреждения в узле колебаний собственные частоты продольных колебаний не зависят от длины поврежденного участка. Показано, что по трем собственным частотам продольных колебаний определяются координата, длина и площадь поперечного сечения стержня в зоне повреждения. В работе [3] рассмотрены обратные коэффициентные задачи о восстановлении модуля упругости, плотности и функции сечения стержня с жестко закрепленным левым концом. Восстановление происходит по амплитудно-частотным характеристикам колебания правого конца, причем частоты колебания должны быть далеки от резонансных. Аналогичные исследования приведены в работе [4], где описан итерационный алгоритм, основанный на аппарате интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода и их дискретизации. В отличие от работ [3, 4] в данной

УТЯШЕВ Ильнур Мирзович – к.т.н., Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН,  
e-mail: utyashev@mail.ru

АИТБАЕВА Айгуль Азаматовна – к.ф.-м.н., Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН,  
e-mail: aitbaeva.90@bk.ru

ЮЛМУХАМЕТОВ Артур Ахмарович, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН,  
e-mail: artur\_yulmuhametov@mail.ru

работе граничные условия могут быть любые, а для восстановления функции сечения используется конечное число собственных значений. В [7] рассмотрены собственные поперечные колебания прямого стержня с поперечным сечением прямоугольной формы, имеющим постоянную высоту и переменную ширину, изменяющуюся по экспоненциальному закону. Аналитическим методом получены значения частот собственных колебаний при различных функциях изменения поперечного сечения стержня и различных способах его закрепления. В зарубежной литературе для решения обратных задач получил широкое развитие метод конечных элементов [8, 9]. В [8] рассмотрена задача идентификации трещин стержней, где для восстановления используется собственная частота вместе с собственной формой. В работе [8] основной упор делается на фильтрацию входных данных. В [9] приведена процедура идентификации для определения характеристик трещины (расположение и размер трещины) на основе динамических измерений. Эта процедура основана на минимизации «среднеквадратического» или «максимального» показателя разницы между данными измерений (собственные частоты и формы колебаний) и соответствующими прогнозами, полученными из вычислительной модели.

**Постановка задачи.** Требуется определить закон изменения площади сечения по конечному числу собственных частот продольных колебаний стержня. Предполагается, что площадь сечения меняется вдоль оси и описывается функцией от продольной координаты. Свободные продольные колебания стержня с переменной площадью сечения описываются уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EF(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $u(x,t)$  – перемещение сечения с координатой  $x$ ,  $F(x)$  – площадь поперечного сечения стержня с координатой  $x$ , модуль упругости  $E$  и плотность  $\rho$  стержня считаются постоянными.

Граничные условия имеют вид  $u_x(0) - h \cdot u(0) = 0$ ,  $u_x(1) + H \cdot u(1) = 0$ .

Здесь  $h$  и  $H$  – жесткости пружин на левом и правом концах соответственно.

Решение уравнения (1) будем искать в виде  $u = y(x) \cos \omega t$ , тогда (1) запишется в виде:

$$(Fy')' + \lambda^2 Fy = 0 \quad (2)$$

где  $\lambda^2 = \frac{\rho \omega^2}{E}$ .

В настоящей работе предлагается площадь поперечного сечения стержня в точке  $x$  принять в виде:

$$F(x) = e^{P(x)}, \quad (3)$$

где  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , коэффициент  $a_0$  соответствует значению площади сечения в точке начала отсчета и считается известным. Подставив (3) в (2), учитывая, что  $P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$ , получим

$$-y'' - P'(x) \cdot y' = \lambda^2 y, \quad (4)$$

$$U_1(y) = y'(0) - h \cdot y(0) = 0, \quad (5)$$

$$U_2(y) = y'(1) + H \cdot y(1) = 0.$$

Общее решение уравнения (4) будем искать в виде

$$y(x, \lambda) = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (6)$$

Здесь  $y_1, y_2$  – линейно-независимые решения уравнения (4). Функции  $y_1, y_2$  будем строить в виде ряда Маклорена по переменным  $x$  и  $\lambda$ , для которых должны выполняться условия:

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \quad (7)$$

$$y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1.$$

Данные Коши (7) обеспечивают линейные независимости функций  $y_1, y_2$  в силу свойств определителя Вронского. Тогда  $y_1, y_2$ , при условии (7), запишутся в виде:

$$y_1(x, \lambda) = 1 - \lambda \frac{x^2}{2!} + P'(0) \cdot \lambda^2 \frac{x^3}{3!} + \left( 2\lambda^2 P''(0) - \lambda^2 \cdot P'^2(0) + \lambda^4 \right) \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$y_2(x, \lambda) = x - P'(0) \frac{x^2}{2!} + \left( -P''(0) + P'^2(0) - \lambda^2 \right) \frac{x^3}{3!} + \left( -P'''(0) + 3P'(0)P''(0) - P'^3(0) - 2\lambda^2 P'(0) \right) \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Причем  $y_1, y_2$  являются целыми функциями по  $\lambda$  при каждом фиксированном  $x$ .

Подставив (6) в граничные условия (5), с учетом (7), имеем

$$-h \cdot C_1 + C_2 = 0,$$

$$C_1 (y_1'(1, \lambda) - H \cdot y_1(1, \lambda)) + C_2 (y_2'(1, \lambda) - H \cdot y_2(1, \lambda)) = 0. \quad (8)$$

Условием существования нетривиального решения линейной алгебраической системы (8)

для коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  является равенство нулю определителя

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} -h & 1 \\ U_2(y_1(1, \lambda)) & U_2(y_2(1, \lambda)) \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

соответствующей системы [10]. Преобразуя (9), получим

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= -y_1'(1, \lambda) - H \cdot y_1(1, \lambda) - \\ &- h \cdot y_2'(1, \lambda) - h \cdot H \cdot y_2(1, \lambda) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Если известна функция площади сечения (3) и граничные условия (5), то решением уравнения (10) являются собственные значения задачи (4)–(5) (прямая задача). В случае, если известны собственные значения и условия закрепления стержня, а вид уравнения (3) требуется восстановить, то (10) есть решение обратной задачи. Подставив собственные значения в характеристический определитель (10), получим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  функции (3).

Рассмотрим решения прямой и обратной задач для различных граничных условий.

**Случай 1.** Жесткое закрепления на обоих концах.

*Прямая задача.* Пусть  $P(x) = -4.9 - 3x + x^2$ , тогда площадь сечения будет описываться функцией (3), график которой приведен на рис. 1 (кривая  $\exp(P(x))$ ).

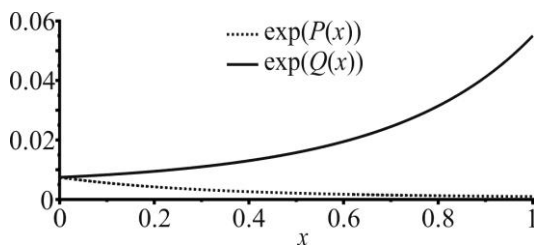


Рис. 1. Функция площади сечения стержня

Пусть торцы стержня закреплены жестко:

$$\begin{aligned} U_1(y) &= y(0) = 0, \\ U_2(y) &= y(1) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

тогда характеристический определитель (10) примет вид [11]:

$$\Delta(\lambda) = y_2(1, \lambda) = 0. \quad (12)$$

При помощи степенного ряда, взятого вплоть до степени 40, получаем первые три собственных значения уравнения (12):  $\lambda_1 = 3.44933$ ,  $\lambda_2 = 6.44596$ ,  $\lambda_3 = 9.53441$ .

*Обратная задача.* Пусть известны два собственных значения  $\lambda_1 = 3.44933$ ,  $\lambda_2 = 6.44596$

задачи (4), (11), а функция площади сечения имеет вид (3), где  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . Требуется по двум собственным значениям и известном коэффициенте  $a_0 = -4.9$  найти функцию, описывающую закон изменения площади поперечного сечения жестко закрепленного стержня. Для определения неизвестных констант  $a_1, a_2$  подставим собственные значения в характеристический определитель (12) и получим систему

$$\begin{cases} y_2(1, \lambda_1) = 0, \\ y_2(1, \lambda_2) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Решение системы (13) будем искать численно в интервале  $a_1 = -4..4$ ,  $a_2 = -2..2$ . Выбран данный интервал, т.к. при известном значении коэффициента  $a_0$  после подстановки найденных коэффициентов в (3) получим функцию сечения стержня, которая не противоречит физической постановке. Данный подход – некое подобие корректности по А.Н. Тихонову [12], когда решение ищется не во всей области, а на компакте, где решение существует и единственно. С помощью математического пакета Maple в заданном интервале получены два набора решений:  $\{a_1 = -3.00000, a_2 = 1.00000\}$ ,  $\{a_1 = 1.00000, a_2 = 1.00000\}$ , соответственно получим функции  $P(x) = -4.9 - 3x + x^2$  и  $Q(x) = -4.9 + x + x^2$ . График для функции площади сечения второго решения приведен на рис. 1 (кривая  $\exp(Q(x))$ ). Действительно, если сравнить собственные значения задачи (4), (11) для функций  $P(x)$  и  $Q(x)$ , то можно заметить, что собственные значения для этих функций совпадают. Это говорит о том, что для различных конфигураций стержня спектр собственных частот может совпадать. Для однозначного решения поставленной задачи, кроме продольных, требуется использовать также собственные значения поперечных и (или) крутильных колебаний.

**Случай 2.** Рассмотрим случай, когда граничные условия не симметричны. Пусть на левом конце стержня жесткое закрепление, а на правом конце свободное:

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Тогда характеристический определитель (10) примет вид:

$$\Delta(\lambda) = y_2'(1, \lambda) = 0. \quad (14)$$

Пусть для данных граничных условий известны собственные значения  $\lambda_1 = 2.25372$ ,  $\lambda_2 = 5.02180$ , а функция площади сечения имеет вид (3), где  $P(x) = -4.9 + a_1x + a_2x^2$ . Требуется по двум собственным значениям найти функцию,

описывающую закон изменения площади поперечного сечения стержня. Для определения неизвестных констант  $a_1, a_2$  подставим собственные значения в характеристический определитель (14) и получим систему

$$\begin{cases} \Delta(\lambda_1) = y_2'(1, \lambda_1) = 0, \\ \Delta(\lambda_2) = y_2'(1, \lambda_2) = 0. \end{cases}$$

В интервале  $a_1 = -4..4, a_2 = -2..2$  найдены два решения системы:  $\{a_1 = -3.00000, a_2 = 1.00000\}, \{a_1 = -1.00000, a_2 = -1.00000\}$ . Графики соответствующих функций приведены на рис. 2, где  $P(x) = -4.9 - 3x + x^2, Q(x) = -4.9 - x - x^2$ . Численные эксперименты показали, что для случая, когда на одном из концов закрепление жесткое, а на другом свободное, спектр собственных значений функций  $P(x)$  и  $Q(x)$  совпадает, и найти единственное решение также не удается.

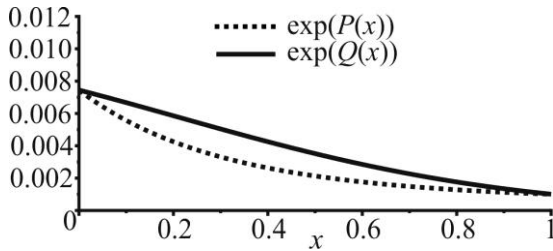


Рис. 2. Функция площади сечения стержня для случая 2

**Случай 3.** На левом конце стержня жесткое закрепление, а на правом конце упругое:

$$y(0) = 0, \quad y'(1) + 2y(1) = 0.$$

Тогда характеристический определитель (10) примет вид:

$$\Delta(\lambda) = y_2'(1, \lambda) + 2 \cdot y_2(1, \lambda) = 0. \quad (15)$$

Пусть для данных граничных условий известны собственные значения  $\lambda_1 = 2.73433,$

$\lambda_2 = 5.35295,$  а функция площади сечения имеет вид (3), где  $P(x) = -4.9 + a_1x + a_2x^2$ . Требуется по двум собственным значениям найти функцию, описывающую закон изменения площади поперечного сечения стержня. Для определения неизвестных констант  $a_1, a_2$  подставим собственные значения в характеристический определитель (15) и получим систему

$$\begin{cases} \Delta(\lambda_1) = y_2'(1, \lambda_1) + 2 \cdot y_2(1, \lambda_1) = 0, \\ \Delta(\lambda_2) = y_2'(1, \lambda_2) + 2 \cdot y_2(1, \lambda_2) = 0. \end{cases}$$

В интервале  $a_1 = -4..4, a_2 = -2..2$  найдено единственное решение системы:  $\{a_1 = -3.00002, a_2 = 1.00000\}$ .

**Оценка погрешности.** Проверим вычислительный эксперимент с помощью зашумления входных данных. Для анализа погрешности метода будем оценивать погрешность восстановления коэффициента  $a_1$  из случая 1. В качестве входных данных примем собственные значения, заданные в виде  $\lambda_j = \lambda_j(1 + \gamma\psi_j)$ , где  $\lambda_j$  – собственное значение, вычисленное с точностью до 9 значащих цифр;  $\gamma$  – амплитуда зашумления;  $\psi_j$  – случайная величина с равномерным законом распределения, определенная на отрезке  $[-1.1]$ . Полагая  $\gamma = 10^{-n}$  ( $n = 3, \dots, 9$ ), исследуем относительную погрешность  $\delta$  приведенного в данной работе метода в зависимости от  $\gamma$  и  $\psi_j$ .

В табл. 1 для каждого значения амплитуды  $\gamma$  приведены результаты пяти экспериментов с различными  $\psi_j$  для коэффициента  $a_1$ . Значения  $\psi_j$  получены с помощью генератора случайных чисел математического пакета Maple. Вычисления проводились со степенными рядами 40 порядка. Для исключения второго решения поиск коэффициентов будем производить в более узком интервале  $a_1 = -4..0, a_2 = 0..2$ . Из табл. 1 следует, что при погрешности входных данных

Т а б л и ц а 1

Относительная погрешность нахождения коэффициента  $a_1$  в зависимости от зашумления входных данных

$\gamma$	$\delta, \%$				
$10^3$	1.64168	0.62099	–	2.63914	7.08594
$10^4$	0.13195	0.19562	0.02188	0.03837	0.31462
$10^5$	0.00208	0.01223	0.02932	0.02268	0.01075
$10^6$	0.00115	0.00068	0.00216	0.00027	0.00192
$10^7$	$1.76 \cdot 10^{-5}$	$7.72 \cdot 10^{-5}$	0.00014	$1.23 \cdot 10^{-5}$	0.00023
$10^8$	$1.23 \cdot 10^{-6}$	$2.25 \cdot 10^{-5}$	$1.40 \cdot 10^{-5}$	$7.30 \cdot 10^{-6}$	$3.89 \cdot 10^{-6}$
$10^9$	$2.45 \cdot 10^{-6}$	$1.20 \cdot 10^{-6}$	$3.06 \cdot 10^{-6}$	$2.36 \cdot 10^{-6}$	$8.29 \cdot 10^{-7}$

не более  $\gamma=10^{-4}$  погрешность восстановления коэффициента  $a_1$  менее 1%. Вычислительный эксперимент показал, что для симметричных граничных условий при определенных значениях случайных величин  $\psi_j$  решение задачи восстановления коэффициента  $a_i$  может не существовать (отсутствие решения в таблице отмечено прочерком). В случае, когда на одном из концов стержня упругое закрепление (случай 3), то при погрешности входных данных не более  $\gamma=10^{-3}$  погрешность восстановления коэффициента  $a_1$  не превышает 3%.

**Заключение.** Из результатов численных экспериментов следует, что для однозначной идентификации функции переменной площади сечения следует использовать упругое закрепление на одном из концов стержня, т.к. в противном случае могут возникнуть несколько решений задачи. В случае симметричных условий закрепления для однозначного решения требуется дополнительно использовать собственные частоты поперечных либо крутильных колебаний. Показано, что для идентификации  $n$  неизвестных коэффициентов функции (3) требуется  $n$  собственных значений. Из оценки погрешности следует, что погрешность нахождения переменной площади сечения менее 1% при погрешности собственных значений продольных колебаний не более  $\gamma = 10^4$ .

*Работа выполнена за счет средств Государственного задания на 2019–2022 годы (№ 0246-2019-0088), а также при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00150-А) и гранта Республики Башкортостан молодым ученым 2020 года № 20ГР.*

### Литература

1. Ахтямов А.М., Каримов А.Р. Диагностирование местоположения трещины в стержне по собственным частотам продольных колебаний // Техническая акустика. 2010. Т. 10. С. 3.
2. Хакимов А.Г. Вибродиагностика повреждения стержня // Известия Уфимского научного центра Российской академии наук. 2018. № 4. С. 11–21.
3. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
4. Бочарова О.В., Ватульян А.О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журнал. 2009. Т. 55. № 3. С. 275–282.

5. Хакимов А.Г. О собственных продольных колебаниях ступенчатого стержня с распределенной присоединенной массой // Контроль. Диагностика. 2013. № 11. С. 9–13.
6. Федотов И.А., Полянин А.Д., Шаталов М.Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // ДАН. 2007. Т. 417. № 1. С. 56–61.
7. Павлов В.П. Поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21. № 2 (76). С. 3–16.
8. Jiménez R.D., Santos L.C., Kuhl N.M., Egaña J.C., Soto R.L. An inverse eigenvalue procedure for damage detection in rods // Computers and Mathematics with Applications. 2004. V. 47. № 4–5. P. 643–657.
9. Shen M. and Taylor J. Identification problem for vibrating cracked beams // Journal of Sound and Vibration. 1991. V. 150. P. 457–484.
10. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
11. Ахтямов А.М., Утяшев И.М. Восстановление полиномиального потенциала в задаче Штурма–Лиувилля // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20. № 2. С. 148–158.
12. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.

### References

1. Akhtyamov A., Karimov A. Diagnostics of crack location in a rod using natural frequency of longitudinal vibration. Electronic Journal Technical Acoustics, 2010, no. 3. Available at: <http://www.ejta.org/en/karimov1>
2. Khakimov A.G. Vibration diagnostics of damage of a rod. Izvestiya Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN, 2018, no. 4, pp. 11–21.
3. Vatulyan A.O. Inverse problems in deformed solid mechanics. Moscow, Fizmatlit, 2007. 224 p.
4. Bocharova O.V., Vatulyan A.O. The reconstruction of density and Young's modulus of an inhomogeneous rod. Acoust. Phys., 2009, vol. 55, pp. 281–288. Available at: <https://doi.org/10.1134/S1063771009030014>
5. Khakimov A.G. On natural longitudinal oscillations of the stepped bar with the distribution of the added masses. Testing. Diagnostics, 2013, no. 11, pp. 9–13.
6. Fedotov I.A., Polyandin A.D. Shatalov M.Y. Theory of free and forced vibrations of a rigid rod based on the Rayleigh model. Dokl. Phys., 2007, no. 52, pp. 607–612. Available at: <https://link.springer.com/article/10.1134%2FS1028335807110080>
7. Pavlov V.P. Transverse vibrations of a rod with variable cross sections and calculation of its eigenfrequencies by the method of splines. Vestnik USATU, 2017, no. 2 (76), pp. 3–16.
8. Jiménez R.D., Santos L.C., Kuhl N.M., Egaña J.C., Soto R.L. An inverse eigenvalue procedure

for damage detection in rods. *Computers and Mathematics with Applications*, 2004, vol. 47, no. 4–5, pp. 643–657.

9. Shen M., Taylor J. Identification problem for vibrating cracked beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, vol. 150, pp. 457–484.

10. Naimark M.A. *Linear differential operators*. Moscow, Nauka, 1969. 526 p.

11. Akhtyamov A.M., Utyashev I.M. Restoration of the polynomial potential in the Sturm-Liouville problem. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 2018, no. 2, pp. 148–58.

12. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for solving incorrect problems*. Moscow, Nauka, 1979. 285 p.



## DETERMINATION OF THE FUNCTION OF THE ROD'S CROSS-SECTIONAL AREA USING VIBRATION EIGENFREQUENCIES

© I.M. Utyashev, A.A. Aitbaeva, A.A. Yulmukhametov

Mavlyutov Institute of Mechanics – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre  
of the Russian Academy of Sciences,  
71, prospekt Oktyabrya, 450054, Ufa, Russian Federation

The paper presents solutions to the direct and inverse problems on longitudinal vibrations of a rod with a variable cross-sectional area. The law of variation of the cross-sectional area is modeled as an exponential function of a polynomial of degree  $n$ . The method for reconstructing this function is based on representing the fundamental system of solutions of the direct problem in the form of a Maclaurin series in the variables  $x$  and  $\lambda$ . Examples of solutions for various section functions and various boundary conditions are given. It is shown that to recover  $n$  unknown coefficients of a polynomial,  $n$  eigenvalues are required, and the solution is dual. An unambiguous solution was obtained only for the case of elastic fixation at one of the rod's ends. The numerical estimation of the method error was made using input data noise. It is shown that the error in finding the variable cross-sectional area is less than 1% with the error in the eigenvalues of longitudinal vibrations not exceeding 0.0001.

Key words: rod, eigenvalues, Sturm-Liouville problem, inverse problem, variable section, longitudinal vibrations, polynomial.